

Lundi, 25 juin 2007

Durée : 1 heure 30 minutes

Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Soit le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (3x^2y \sin y - 2x^2 \cos y, ax^3y \cos y + bx^3 \sin y)$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (1) Trouver a et b pour que \vec{V} soit un champ de gradient.
- (2) Soit C un arc de courbe quelconque d'extrémités $(0, 0)$ et $(0, 1)$ avec une représentation paramétrique $\gamma : t \rightarrow (x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$, $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (0, 1)$. Pour a et b trouvés ci-dessus, démontrer que

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{\gamma} = 0.$$

- (3) Plus généralement, soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ et C un arc de courbe comme dans (2). Exprimer l'intégrale

$$I = \int_C \vec{W} \cdot d\vec{\gamma}$$

comme une intégrale en t et la calculer en fonction des données (on remarquera que l'expression à intégrer est la dérivée d'une fonction facile à écrire).

Exercice II. On considère la fonction $h(x, y) = x^2y + \ln(1 + y^2)$.

- (1) Soit Γ la courbe dans \mathbb{R}^2 définie par $h(x, y) = 0$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier que le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas au point $(0, 0)$ de Γ .
- (2) Pour $a \neq 0$, soit g_a la restriction de h à la droite d'équation $y = ax$. Montrer que g_a admet un minimum local à l'origine, et qu'il en est de même pour la restriction de h à l'axe (Oy) .
- (3) Étudier le signe de h au voisinage de l'origine. Montrer que h n'admet pas de minimum local à l'origine.

Exercice III. Soit $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

- (1) Démontrer que la courbe α de \mathbb{R}^3 représentée paramétriquement par

$$(g(t), \sin t, \cos t), t \in [-\pi, \pi].$$

a la même longueur que la courbe plane représentée par l'équation $y = g(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$.

- (2) Calculer la longueur de la courbe $\alpha(t) = (\sqrt{\pi^2 - t^2}, \sin t, \cos t)$, pour $t \in [-\pi, \pi]$

Exercice IV. On considère la courbe Γ de \mathbb{R}^2 donnée par la représentation paramétrique $x(t) = \sin 2t$ et $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

- (1) Trouver les valeurs de t pour lesquelles $x(t) = 0$ et calculer les valeurs de $y(t)$ correspondantes. Trouver les valeurs de t pour lesquelles $y(t) = 0$ et calculer les valeurs de $x(t)$ correspondantes. Déterminer les points de \mathbb{R}^2 pour lesquels la tangente à la courbe est soit horizontale, soit verticale. Marquer les valeurs maximales de x et de y sur les axes. Représenter graphiquement Γ .
- (2) Écrire l'équation de la droite tangente à la courbe au point $t = \pi/3$.

Exercice V. Calculer l'intégrale

$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz, \text{ avec } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$