Université Claude Bernard – Lyon 1

Math IV: ANALYSE (L2) – Examen final. Corrigé

Mardi, 10 juin 2008 Durée : 2 heures

Exercice I. *Le but de cet exercice est de déterminer la forme de toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient*

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ . \tag{1}$$

(1) *Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que la fonction $f(x,y) := \phi(x+y)$ est de classe C^1 et qu'elle vérifie l'équation (1).*

(2) *Réciproquement, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui vérifie l'équation (1). Montrons alors qu'il existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $f(x,y) = \phi(x+y)$. Pour cela, posons $g(s,t) := f\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right)$.*

  (a) *Calculer $\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}$, et montrer que $\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = 0$.*

  (b) *En déduire qu'il existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $g(s,t) = \phi(s)$.*

  (c) *Conclure.*

SOLUTION.

(1) Les fonctions $(x,y) \to x$ et $(x,y) \to y$ sont de classe C^1, donc leur somme $(x,y) \to x+y$ également. Comme la composée de deux fonctions de classe C^1 est de classe $C^1, (x,y) \to \phi(x+y)$ est de classe C^1. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = \phi'(x+y) = \frac{\partial f}{\partial y}$, donc f verifie l'équation (1).

(2) (a) On sait que si $g(s,t) = f(X(s,t), Y(s,t))$ alors
$\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(s,t),Y(s,t)\big) + \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y}\big(X(s,t),Y(s,t)\big)$. Donc
$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right)$. Comme f vérifie (1) alors $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$.

  (b) Pour tout $s, t \mapsto g(s,t)$ est constante car sa dérivé est nulle, donc $g(s,t) = g(s,0)$. Posons $\phi(s) = g(s,0)$, alors on a $g(s,t) = \phi(s)$.

  (c) Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ on a $f\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right) = g(s,t) = \phi(s)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En posant $s = x+y$ et $\phi(s) = g(s,0)$, on trouve que $f(x,y) = \phi(x+y)$. On en conclut que les fonctions vérifiant l'équation (1) sont exactement les fonctions de la forme $f(x,y) = \phi(x+y)$.

Exercice II. *Calculer l'intégrale double $\iint_D \frac{1}{1+(x/2)^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ sur le domaine d'intégration $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1\right\}$. <u>Indication</u> : On pensera à faire un changement de variables adéquat et on n'oubliera pas de calculer le jacobien.*

SOLUTION. La courbe entourant le domain $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ est l'ellipse, dont on connait une parametrization $x = 2\cos t$ et $y = \sin t$ avec $t \in [0, 2\pi[$. Pour avoir tout les points à l'interieur de l'ellipse on a $x = 2r\cos t$ et $y = r\sin t$ avec $r \in [0,1]$. Le Jacobian de ce changement de variables : $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = 2r$. L'intégrale devient :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{1+r^2} 2r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{1+r^2}\mathrm{d}(\mathrm{r}^2+1) = 2\pi\big[\ln(1+\mathrm{r}^2)\big]_0^1 = -2\pi\ln 2$$

Exercice III. *Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $g(x,y) = 2x^2 + y^4 - 4xy$.*

(1) *Déterminer les points critiques de g.*

(2) *Déterminer la nature de ces points (point col, maximum local ou minimum local).*

(3) *Vérifier que $g(x,y) = 2(x-y)^2 - 2y^2 + y^4$, et en déduire que $g(x,y) \geq -2y^2 + y^4$ et que $g(x,y) \geq 2(x-y)^2 - 2y^2 = 2x(x-2y)$. En déduire que si $g(x_0,y_0) \leq 0$ pour certain $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, alors $|x_0| \leq 2|y_0| \leq 2\sqrt{2}$, ce qui implique que $x_0^2 + y_0^2 \leq 10$. Finalement, démontrer qu'un des points critiques trouvés dans la question (1) est le minimum global de g et calculer la valeur de g en ce point.*

(4) *Soit $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ la courbe de niveau 0 de g. Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique sur tout Γ sauf en 3 points, dont l'un est le point $(0,0)$. Calculer les 2 autres points, et essayer de donner une explication de la raison de la non applicabilité du théorème des fonctions implicites en ces 3 points. On pourra éventuellement s'aider de la question (3) pour esquisser Γ et répondre à cette question.*

SOLUTION.

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial x} \Leftrightarrow 4x - 4y = 4y^3 - 4x = 0$, donc (x, y) est un point critique si et seulement si $x = y$ et $x^3 - x = 0$. Or $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$, donc les solutions sont $(0,0), (1,1)$ et $(-1,-1)$.

(2) Soient $R = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 4, S = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -4, T = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 12y^2$. Au point $(0,0)$, $RT - S^2 = -16 < 0$ donc $(0,0)$ est un point col. Au point $\pm(0,0)$, $RT - S^2 = 32 > 0$ et $R > 0$ donc $(1,1)$ et $(-1,-1)$ sony des minima locaux.

(3) On montre facilement que $g(x,y) = 2(x-y)^2 - 2y^2 + y^4$ en développant le premier membre. Comme $2(x-y)^2 \geq 0$ on a $g(x,y) \geq -2y^2 + y^4$ mais aussi $y^4 \geq 0$ et donc $g(x,y) \geq 2(x-y)^2 - 2y^2 = 2x(x-2y)$. Si $f \leq 0$ alors $0 \geq -2y^2 + y^4 = y^2(y^2-2)$ donc $y^2 < 2$, d'où $|y| \leq \sqrt{2}$. De plus, $0 \geq 2x(x-2y)$ donc en considérant $x(x-2y)$ comme en polynôme du second degré en x, on voit que x est entre les deux racine de ce polynôme 0 et $2y$, donc $|x| \leq |2y|$. On en déduit que $|x| \leq 2|y| \leq 2\sqrt{2}$. Par conséquent, $x^2 + y^2 \leq (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 10$. Le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 10\}$ est un compact et g est une fonction continue donc elle atteient son minimum sur D. Soit a le point de minimum sur D, si $z \in D$ alors par définition de minimum $g(z) \geq g(a)$. Si $z \notin D$ alors $g(z) \geq 0 = g(0,0)$. Or, $(0,0) \in D$ donc $g(0,0) \geq g(a)$ et par conséquent $g(z) \geq g(a)$. La fonction g atteint son minimum global en a donc a se trouve parmis les points critiques de g. Comme $g(1,1) = g(-1,-1) = -1$. On en déduit que $\min(g) = -1$.

(4) Le théoréme des fonctions implicites s'implique au voisinage d'un point (x,y) de la courbe $g(x,y) = 0$ où g est de classe C^1 avec la condition $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \neq 0$ dans ce cas on peut trouver un voisinage suffisamment petit de (x,y), que l'ensemble des points tels que $g(x,y) = 0$, peut être décrit comme un graphe $y = \phi(x)$. On a alors deux equations

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2x^2 + y^4 - 4xy & = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2x^2 + y^4 - 4xy & = 0 \\ 4y^3 - 4x & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2y^6 - 3y^4 & = 0 \\ x & = y^3 \end{array} \right.$$

D'où les points $(0,0)$ et $(\pm 3/2\sqrt{3/2}, \pm\sqrt{3/2})$ sont les trois points où $\partial g / \partial y$ s'annule et on ne peut pas exprimer y comme fonction de x au voisinage de ces points.

Exercice IV. *Utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer l'aire de la région de $\mathbb{R}^2$ délimitée par la courbe d'équation $[0, 2\pi] \ni t \mapsto (a\cos^3(t), a\sin^3(t)) \in \mathbb{R}^2$, pour $a > 0$.*

<u>Indication</u> : Dans le calcul de l'intégrale on pourra utiliser la formule d'Euler : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ *et* $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ *et ses conséquences :*

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{2ix}}{4} = \frac{\cos 2x + 1}{2} \\
\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} \\
\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8} \\
\cos^6 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^6 = \frac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{32}
\end{aligned}$$

SOLUTION. La formule de Green-Riemann utilisé pour le calcul d'aire de la région T avec le bord ∂T est par exemple la suivante :

$$\mathrm{Air}(T) := \iint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial T} x dy.$$

$$x\,\mathrm{d}y = a\cos^3 t \cdot a3\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t = 3a^2\cos^4 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t = 3a^2\cos^4 t(1 - \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = 3a^2(\cos^4 t - \cos^6 t)\,\mathrm{d}t$$

et par les formules de linéarization on a

$$x\,\mathrm{d}y = 3a^2\left(\frac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8} - \frac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{32}\right)\mathrm{d}t$$

Les seuls terms qui ne donne pas 0 à l'intégration de t sur $[0, 2\pi]$ sont les constantes, ce qui nous donne finalement $3a^2(3/8 - 10/32)2\pi = \underline{3/8a^2\pi}$.

Exercice V. QCM

(1) *La boule unité autour de l'origine par rapport à la norme* $\| (x,y) \|_\infty = \max(|x|,|y|)$ *est*

- (a) *le cercle unité autour de 0;* ☐
- (b) *le carré de sommets* $(0,1),(1,0),(-1,0),(0,-1)$; ☐
- (c) *le carré de sommets* $(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1)$. ☒

(2) *Soit l'ensemble* $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. *Alors :*

- (a) *A est fermé;* ☐
- (b) *A est ouvert;* ☐
- (c) *A est compact;* ☐
- (d) *A est connexe par arc;* ☒
- (e) *A est borné.* ☒

(3) *La fonction f définie par* $f(x,y) = \dfrac{1+xy+x^3}{y^2}$ *pour* $(x,y) \neq (0,0)$

- (a) *n'admet pas de limite en* $(x,y)=(0,0)$; ☒
- (b) *admet la limite 0 en* $(0,0)$; ☐
- (c) *admet la limite 1 en* $(0,0)$. ☐

(4) *La dérivée d'une fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *de classe* C^1, *dans la direction du vecteur unitaire* $\vec{u}$ *est donnée par la formule*

- (a) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) \cdot \vec{u}$; ☒
- (b) $(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y)) \wedge \vec{u}$; ☐
- (c) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f\big((x,y)+t\vec{u}\big)-f(x,y)}{t}$. ☒

(5) *Le vecteur gradient d'une fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *de classe* C^1, *calculé au point* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *est*

- (a) *parallèle à la ligne de niveau passant par* (x,y); ☐
- (b) *nul si le point* (x,y) *est un minimum local;* ☒
- (c) *toujours positif ou zéro.* ☐

(6) *La fonction* $f(x,y) = x^{2008} + y^{2008}$

- (a) *possède un maximum global sur* $\mathbb{R}^2$; ☒
- (b) *possède un minimum global sur* $\mathbb{R}^2$; ☐
- (c) *possède un maximum sur le carré* $C = \{1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$. ☒

(7) *Une application* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

- (a) *est un champ de vecteurs;* ☐
- (b) *paramètre une courbe dans l'espace;* ☒
- (c) *peut paramétrer un plan dans l'espace.* ☐

(8) *Soit* Δ *le triangle défini par les trois droites :* $x=0,\ y=0$ *et* $y = x-1$. *L'intégrale double* $\displaystyle\iint_\Delta \sin x\, e^{xy}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ *est égale à*

- (a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(\int_0^1 \sin x\, e^{xy}\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$; ☐
- (b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(\int_0^{y+1} \sin x\, e^{xy}\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$; ☒
- (c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(\int_{x-1}^{0} \sin x\, e^{xy}\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$; ☒
- (d) $\displaystyle\int_{x-1}^{1} \left(\int_{-1}^{0} \sin x\, e^{xy}\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$. ☐

(9) *Soit* $\overrightarrow{V} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$. *Le rotationnel de* $\overrightarrow{V}$ *est égal à*

- (a) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix}$; ☒
- (b) $y+z+x$; ☐
- (c) $-2(z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k})$; ☒
- (d) $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. ☐

(10) *Soit* $\omega(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ *une 1-forme différentielle et soit* $\overrightarrow{V}(x,y) = P(x,y)\partial/\partial x + Q(x,y)\partial/\partial y$ *un champs de vecteurs. La forme* ω *est exacte*

- (a) *si et seulement si le champ de vecteurs V est un champ de gradient;* ☒
- (b) *si et seulement si elle est fermée, c'est-à-dire* $\mathrm{d}\omega = 0$; ☐
- (c) *si et seulement si son intégrale curviligne sur tout circuit fermé est nulle.* ☒