Université Claude Bernard – Lyon 1

Math IV: ANALYSE (L2) – Examen final

Mardi, 10 juin 2008
Durée : 2 heures
Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Le but de cet exercice est de déterminer la forme de toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ . \tag{1}$$

(1) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que la fonction $f(x,y) := \phi(x+y)$ est de classe C^1 et qu'elle vérifie l'équation (1).

(2) Réciproquement, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui vérifie l'équation (1). Montrons alors qu'il existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $f(x,y) = \phi(x+y)$. Pour cela, posons $g(s,t) := f\big(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\big)$.

  (a) Calculer $\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}$, et montrer que $\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = 0$.

  (b) En déduire qu'il existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $g(s,t) = \phi(s)$.

  (c) Conclure.

Exercice II. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D \frac{1}{1 + (x/2)^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

sur le domaine d'intégration

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Big(\frac{x}{2}\Big)^2 + y^2 \leq 1 \Big\}.$$

<u>Indication</u> : On pensera à faire un changement de variables adéquat et on n'oubliera pas de calculer le jacobien.

Exercice III. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $g(x,y) = 2x^2 + y^4 - 4xy$.

(1) Déterminer les points critiques de g.

(2) Déterminer la nature de ces points (point col, maximum local ou minimum local).

(3) Vérifier que $g(x,y) = 2(x-y)^2 - 2y^2 + y^4$, et en déduire que $g(x,y) \geq -2y^2 + y^4$ et que $g(x,y) \geq 2(x-y)^2 - 2y^2 = 2x(x-2y)$. En déduire que si $g(x_0,y_0) \leq 0$ pour certain $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, alors $|x_0| \leq 2|y_0| \leq 2\sqrt{2}$, ce qui implique que $x_0^2 + y_0^2 \leq 10$. Finalement, démontrer qu'un des points critiques trouvés dans la question (1) est le minimum global de g et calculer la valeur de g en ce point.

(4) Soit $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ la courbe de niveau 0 de g. Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique sur tout Γ sauf en 3 points, dont l'un est le point $(0,0)$. Calculer les 2 autres points, et essayer de donner une explication de la raison de la non applicabilité du théorème des fonctions implicites en ces 3 points. On pourra éventuellement s'aider de la question (3) pour esquisser Γ et répondre à cette question.

T.S.V.P. ↺

Exercice IV. Utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer l'aire de la région de $\mathbb{R}^2$ délimitée par la courbe d'équation $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \big(a\cos^3(t), a\sin^3(t)\big) \in \mathbb{R}^2$, pour $a > 0$.
<u>Indication</u> : Dans le calcul de l'intégrale on pourra utiliser la formule d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

et ses conséquences :

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{2ix}}{4} = \frac{\cos 2x + 1}{2} \\
\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} \\
\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8} \\
\cos^6 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^6 = \frac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{32}
\end{aligned}$$

Numero de feuille d'examen à reporter : ______________________________

Exercice V. QCM

Attention : chaque question a au moins une réponse correcte mais peut avoir plus d'une réponse correcte. Pour avoir le demi-point d'une question, il est impératif de trouver toutes les réponses correctes.

(1) La boule unité autour de l'origine par rapport à la norme $\| (x, y) \|_\infty = \max(|x|, |y|)$ est

- (a) le cercle unité autour de 0; ☐
- (b) le carré de sommets $(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)$; ☐
- (c) le carré de sommets $(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)$. ☐

(2) Soit l'ensemble $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Alors :

- (a) A est fermé; ☐
- (b) A est ouvert; ☐
- (c) A est compact; ☐
- (d) A est connexe par arc; ☐
- (e) A est borné. ☐

(3) La fonction f définie par $f(x, y) = \dfrac{1 + xy + x^3}{y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$

- (a) n'admet pas de limite en $(x, y) = (0, 0)$; ☐
- (b) admet la limite 0 en $(0, 0)$; ☐
- (c) admet la limite 1 en $(0, 0)$. ☐

(4) La dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$ est donnée par la formule

- (a) $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y) \cdot \vec{u}$; ☐
- (b) $\big(\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y)\big) \wedge \vec{u}$; ☐
- (c) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f\big((x, y) + t\vec{u}\big) - f(x, y)}{t}$. ☐

(5) Le vecteur gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, calculé au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est

- (a) parallèle à la ligne de niveau passant par (x, y); ☐
- (b) nul si le point (x, y) est un minimum local; ☐
- (c) toujours positif ou zéro. ☐

(6) La fonction $f(x,y) = x^{2008} + y^{2008}$

- (a) possède un maximum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (b) possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (c) possède un maximum sur le carré $C = \{1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$. ☐

(7) Une application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

- (a) est un champ de vecteurs; ☐
- (b) paramètre une courbe dans l'espace; ☐
- (c) peut paramétrer un plan dans l'espace. ☐

(8) Soit Δ le triangle défini par les trois droites : $x = 0,\ y = 0$ et $y = x - 1$. L'intégrale double $\iint_\Delta \sin x\ e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est égale à

- (a) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1}\sin x\ e^{xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$; ☐
- (b) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{y+1}\sin x\ e^{xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$; ☐
- (c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{x-1}^{0}\sin x\ e^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$; ☐
- (d) $\displaystyle\int_{x-1}^{1}\left(\int_{-1}^{0}\sin x\ e^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$. ☐

(9) Soit $\overrightarrow{V} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$. Le rotationnel de $\overrightarrow{V}$ est égal à

- (a) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix}$; ☐
- (b) $y + z + x$; ☐
- (c) $-(z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k})$; ☐
- (d) $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. ☐

(10) Soit $\omega(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ une 1-forme différentielle et soit $\overrightarrow{V}(x,y) = P(x,y)\partial/\partial x + Q(x,y)\partial/\partial y$ un champs de vecteurs. La forme ω est exacte

- (a) si et seulement si le champ de vecteurs V est un champ de gradient; ☐
- (b) si et seulement si elle est fermée, c'est-à-dire $d\omega = 0$; ☐
- (c) si et seulement si son intégrale curviligne sur tout circuit fermé est nulle. ☐