Université Claude Bernard – Lyon 1

Math IV: ANALYSE (L2) – Examen final

Mardi, 25 juin 2008. Deuxième session.
Durée : 1 heure 30 minutes
Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Soit $\gamma(t) = (3\cos t, 5\sin t, 2\cos 2t)$, $t \in [0,\pi]$ une representation paramétrique d'une courbe Γ de $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que la valeur absolue du vecteur tangent ne dépend pas de t.
(2) Ecrire l'équation de la droite tangente au point $A = (\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 1)$.
(3) Calculer la longueur d'arc de cette courbe pour les valeurs de $t \in [0,\pi]$.
(4) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Γ avec le plan yz.

Exercice II. L'objectif de cet exercice est d'intégrer l'application

$$f(x,y) = (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)$$

sur la partie D de $\mathbb{R}^2$ limitée par les courbes suivantes:

$$x = y \ , \ xy = a \ , \ xy = b \ , \ y^2 - x^2 = 1$$

a et b sont deux nombres réels tels que $0 < a < b$.

(1) Représenter avec précision la région D. (On remarque que $y^2 - x^2 = 1$ est une hyperbole $(x+y) = 1/(y-x)$ avec les axes $y = x$ et $y = -x$.)
(2) On introduit un changement de variables en posant $u = y^2 - x^2$ et $v = xy$. Calculer les dérivées partielles suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} \ , \ \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(3) Calculer le déterminant de la matrice jacobienne $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$. En déduire le déterminant de $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ en fonction de x et y.
(4) Montrer que

$$\iint_D f(x,y) \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_0^1 \frac{u^v}{2} \ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

(5) Déduire du point précédent la valeur de l'intégrale.

Exercice III.

Soit $\overrightarrow{F} = ay\overrightarrow{i} + bx\overrightarrow{j}$, $a,b \in \mathbb{R}$ un champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Trouver la relation entre a,b si l'intégrale curviligne de $\overrightarrow{F}$ lelong n'importe quelle courbe simple, C, est égale à l'aire du domain plain D dont C est la frontière.

Indication : Utiliser la formule de Green-Riemann pour évaluer l'aire de D délimité par la courbe C.

Numero de feuille d'examen à reporter : ________________________________

Exercice IV. QCM. Attention : chaque question peut avoir plus d'une réponse correcte. Pour avoir le demi-point d'une question, il est impératif de trouver toutes les réponses correctes et que des reponses correctes.

(1) Une boule unité autour de l'origine par rapport à la norme $\| (x, y) \|_1 = |x| + |y|$

- (a) le cercle unité autour de 0; ☐
- (b) le carré de sommets $(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)$; ☐
- (c) le carré de sommets $(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)$. ☐

(2) Fonction f définie par $f(x, y) = \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$

- (a) n'admet pas de limite en $(x, y) = (0, 0)$; ☐
- (b) admet la limite 0 en $(0, 0)$; ☐
- (c) admet la limite 1 en $(0, 0)$. ☐

(3) Soit l'ensemble $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$. Alors :

- (a) A est fermé; ☐
- (b) A est ouvert; ☐
- (c) A est compact; ☐
- (d) A est connexe par arc; ☐
- (e) A est borné. ☐

(4) Soit g une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère une fonction f des deux variables x et y, définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $f(x, y) = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Alors, $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$

- (a) n'est pas bien défini sur U; ☐
- (b) est une constante; ☐
- (c) est une fonction (non constante) de la dérivée de g. ☐

(5) En coordonnées polaires le plan euclidien on a $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On calcule $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$. Alors,

- (a) $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{1}{\cos\theta}$; ☐
- (b) $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$; ☐
- (c) $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\cos\theta}{r}$. ☐

T.S.V.P. ↻

(6) La fonction $f(x,y) = x^{2008}y^{2008}$

- (a) possède un maximum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (b) possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (c) possède un maximum sur le cercle unité autour de $(0,0)$. ☐

(7) Soient

$$\vec{V} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j}$$

un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et Γ une courbe de $\mathbb{R}^2$ lisse par morceaux allant de point a au point b. La condition ***suffisante*** pour que V soit un champ de gradient est

- (a) $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$; ☐
- (b) $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$; ☐
- (c) son intégrale curviligne sur Γ depend que de a et de b. ☐

(8) Le changement de variables $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ a pour jacobien $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}$:

- (a) -1; ☐
- (b) 1; ☐
- (c) ρ; ☐
- (d) $\rho^2\cos\theta\sin\theta$. ☐

(9) Une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

- (a) est un champ de vecteurs; ☐
- (b) paramètre une courbe dans l'espace; ☐
- (c) peut paramétrer un plan dans l'espace. ☐

(10) Soit Δ une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ définie entre la parabole $x = y^2$ et la droite $x = 1$. L'intégrale double $\displaystyle\iint_\Delta \sin x\, e^{xy}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ est égale à

- (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2}^{1} \sin x\; e^{xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$; ☐
- (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1} \sin x\; e^{xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$; ☐
- (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{y^2} \sin x\; e^{xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$; ☐
- (d) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sin x\; e^{xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$. ☐