

Université Claude Bernard – Lyon 1
MATH IV Analyse (L2) – Examen Partiel. Corrigé

Mardi, 27 avril 2010. Durée : 1 heure 30 minutes

Exercice I. Donner la définition d'une norme sur \mathbb{R}^p avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'une boule ouverte (de centre A et rayon R) par rapport à une norme sur \mathbb{R}^p est convexe. (Une partie $P \subset \mathbb{R}^p$ est convexe si $X, Y \in P$ implique $tX + (1-t)Y \in P$ pour tout $t \in [0, 1]$.)

On appelle norme sur \mathbb{R}^p une application de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}_+ qui à x associe un nombre réel $\|x\|$, positif ou 0, et vérifie

- N1 (séparation) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- N2 (homogénéité positive) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- N3 (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Soit X, Y deux points intérieurs d'une boule ouverte $B(A, R)$ ce qui signifie que $\|X - A\| < R$ et $\|Y - A\| < R$. Il faut montrer que $\|(tX + (1-t)Y) - A\| < R$ pour tout $t \in [0, 1]$. On remarque que $\|(tX + (1-t)Y) - A\| = \|t(X - A) + (1-t)(Y - A)\|$. Par l'inégalité triangulaire et la homogénéité positive on a $\|t(X - A) + (1-t)(Y - A)\| \leq \|t(X - A)\| + \|(1-t)(Y - A)\| = t\|X - A\| + (1-t)\|Y - A\| < tR + (1-t)R = R$. ■

Exercice II. Calculer les limites si elles existent de la fonction définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y^3\}$

$$h(x, y) = \frac{x^3 - y}{x - y^3} + 2$$

aux points $(1, 1)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$.

La fonction h est continue en $(-1, 1)$: la limite en $(-1, 1)$ est égale à la valeur de h en ce point, i.e. à 3.

Les droites $y = kx, k \in \mathbb{R}^+$ passent par le point $(0, 0)$. La restriction de h à une droite $y = kx$ donne : $h(x, kx) = \frac{x^3 - kx}{x - (kx)^3} + 2 = \frac{x(x^2 - k)}{x(1 - k^3x^2)} + 2$.

En point $(0, 0)$ on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - k)}{x(1 - k^3x^2)} + 2 = -k + 2$, i.e. la limite dépend de k , i.e. de la droite choisie. Par conséquence, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$ n'existe pas car si elle avait existé elle aurait été unique.

Pour le point $(1, 1)$, prenons deux courbes qui passent par ce point, par exemple la droite $y = x$ et la parabole $y = x^2$. Pour la droite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x - x^3} + 2 = 1$ pour la parabole

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x - x^6} + 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{1 - x^5} + 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{-5x^5} + 2 = \frac{9}{5},$$

en utilisant le règle de l'Hospital. On obtient deux valeurs différentes de la limite donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} h(x, y)$ n'existe pas car si elle avait existé elle aurait été unique. ■

Exercice III. Soit F l'application définie par

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (1) Montrer que F est continue sur \mathbb{R}^2 .
- (2) Calculer les dérivées directionnelles en $(0, 0)$ dans la direction donnée par un vecteur unitaire $(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi[$.
- (3) Quelle est le lien entre le gradient d'une fonction différentiable et la dérivée directionnelle ?
- (4) F est-elle différentiable en $(0, 0)$?

- (1) Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en tant qu'une fraction des fonctions continues. En $(0, 0)$ on a :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^3 \cos^3 t + 3r^3 \cos t \sin^2 t}{r^2}$$

Cette limite est égale au produit des limites : $(2 \cos^3 t + 3 \cos t \sin^2 t) \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$, car $|2 \cos^3 t + 3 \cos t \sin^2 t|$ - une fonction bornée (par exemple par 3 car $2 \cos^3 t + 3 \cos t \sin^2 t = 2 \cos t (\cos^2 t + \sin^2 t) + \cos t \sin^2 t$). Donc la fonction F est continue en $(0, 0)$. Par conséquence elle est continue sur \mathbb{R}^2 .

(2)

$$\begin{aligned} D_{(\cos t, \sin t)} F(0, 0) &:= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + u(\cos t, \sin t)) - f(0, 0)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u \cos t, u \sin t) - f(0, 0)}{u} = \frac{2u^3 \cos^3 t + 3u^3 \cos t \sin^2 t}{u \cdot u^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= 2 \cos^3 t + 3 \cos t \sin^2 t \end{aligned}$$

- (3) Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, différentiable en $A \in D$ et \vec{V} un vecteur de \mathbb{R}^p . Alors,

$$D_{\vec{V}} f(A) = \overrightarrow{\text{grad}} f(A) \cdot \vec{V} \quad (1)$$

- (4) Les dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y sont les dérivés directionnelles dans les direction de vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$. De la question (2) on a

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(0, 0) = (D_{(1,0)} F, D_{(0,1)} F)(0, 0) = (0, 2).$$

La formule $(D_{(\cos t, \sin t)} F)(0, 0) = \overrightarrow{\text{grad}} F(0, 0) \cdot (\cos t, \sin t)$ n'est pas satisfaite pour presque aucun vecteur $(\cos t, \sin t)$. Donc F n'est pas différentiable en $(0, 0)$. ■

Exercice IV. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que son gradient au point $(2, 3)$ est $(4, -1)$ et $f(2, 3) = 7$.

- (1) Donner la définition d'un point critique d'une fonction.
- (2) Est-ce que $(2, 3)$ un maximum ou minimum local de f , ou ni l'un ni l'autre ? Justifier brièvement.
- (3) Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $f(2 + \epsilon, 3 - \epsilon)$ est-il plus grand ou plus petit que 7 ? Justifier votre réponse.
- (4) On définit une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par : $g(t) = f(2t^2, t^3 + 2)$. Trouver la valeur de la dérivée de g au point $t = 1$.

- (1) Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur une partie D de \mathbb{R}^p . On dit que $A \in D$ est un point critique de f si toutes les dérivées partielles s'annulent en A (équivalent à dire que le gradient de f est nul en A , équivalent à dire aussi que la différentielle de f est nul en A).
- (2) La condition nécessaire d'un extremum en un point donné est que ce point est un point critique. Ce n'est pas le cas ici car le gradient n'est pas le vecteur nul.
- (3) La formule de Taylor en $(2, 3)$ à l'ordre 1 est

$$f(2 + h, 3 + k) = f(2, 3) + h \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) + k \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) + o(\|(h, k)\|)$$

Pour ϵ suffisamment petit on a

$$f(2 + \epsilon, 3 - \epsilon) = f(2, 3) + \epsilon \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) + (-\epsilon) \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) + o(\epsilon) = 7 + \epsilon \cdot 4 - \epsilon \cdot (-1) + o(\epsilon)$$

Donc pour ϵ suffisamment petit (dans le voisinage de $(2, 3)$ où la formule de Taylor à l'ordre 1 tient, i.e. les terms en ordre supérieur sont négligeables par rapport à ϵ on a $f(2 + \epsilon, 3 - \epsilon) = 7 + 5\epsilon + o(\epsilon)$.) Par conséquence, la réponse : $f(2 + \epsilon, 3 - \epsilon)$ est plus grand que 7!

- (4) Pour $t = 1$, on a $(x, y) = (2t^2, t^3 + 2)|_{t=1} = (2, 3)$. On connaît les valeurs des dérivées partielles de f dans ce point. La fonction g est une fonction composée et sa dérivée se calcul comme suit :

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 4 \cdot 4t + (-1) \cdot 3t^2 = 13$$

