

Université Claude Bernard – Lyon 1

MATH IV Analyse (L2) – Examen Partiel

Mardi, 27 avril 2010

Durée : 1 heure 30 minutes

Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Donner la définition d'une norme sur \mathbb{R}^p avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'une boule ouverte (de centre A et rayon R) par rapport à une norme sur \mathbb{R}^p est convexe. (Une partie $P \subset \mathbb{R}^p$ est convexe si $X, Y \in P$ implique $tX + (1 - t)Y \in P$ pour tout $t \in [0, 1]$.)

Exercice II. Calculer les limites si elles existent de la fonction définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y^3\}$

$$h(x, y) = \frac{x^3 - y}{x - y^3} + 2$$

aux points $(1, 1)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$.

Exercice III. Soit F l'application définie par

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (1) Montrer que F est continue sur \mathbb{R}^2 .
- (2) Calculer les dérivées directionnelles en $(0, 0)$ dans la direction donnée par un vecteur unitaire $(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi[$.
- (3) Quelle est le lien entre le gradient d'une fonction différentiable et la dérivée directionnelle ?
- (4) F est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice IV. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que son gradient au point $(2, 3)$ est $(4, -1)$ et $f(2, 3) = 7$.

- (1) Donner la définition d'un point critique d'une fonction.
- (2) Est-ce que $(2, 3)$ un maximum ou minimum local de f , ou ni l'un ni l'autre ? Justifier brièvement.
- (3) Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $f(2 + \epsilon, 3 - \epsilon)$ est-il plus grand ou plus petit que 7 ? Justifier votre réponse.
- (4) On définit une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par : $g(t) = f(2t^2, t^3 + 2)$. Trouver la valeur de la dérivée de g au point $t = 1$.