Université Claude Bernard – Lyon 1

MATH IV Analyse (L2) – Examen Final

Mardi, 15 juin 2010

Durée : 2 heures

Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2xy}{1-y^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

en changeant l'ordre d'intégration.

Exercice II. Calculer la longueur de l'arc de courbe $x = y^{3/2}$ avec $0 \leq y \leq 1$.

Exercice III. Soient

$$g\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (8x^3 + y, 2x) \ \text{ et } h\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto (2u - v^3, 3v).$$

Calculer en tout point de $\mathbb{R}^2$ la matrice Jacobienne $h \circ g$.

Exercice IV. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx,$$

définie comme la limite $I = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}^*, n\longrightarrow+\infty} I_n$, où $I_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2}dx$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons le quart de disque : $D_n = \{x^2 + y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ et le carré : $Q_n = \{0 \leq x \leq n,\ 0 \leq y \leq n\}$.

(1) Calculer les intégrales

$$J_n = \int\int_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.

(2) Considérons l'intégrale

$$K_n = \int\int_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Montrer que $K_n = I_n^2$.

(3) Tracer à l'aide d'un repère orthonormé D_1, D_2 et Q_1.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.Montrer que $\sqrt{J_n} \leq I_n \leq \sqrt{J_{2n}}$.

(5) En déduire que (I_n) converge et déterminer I.

Exercice V. On note $\mathcal{E}$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ donnée par les équations paramétriques

$$\gamma\ : t \mapsto \begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \frac{1}{2}\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

et $M_0 = (0,1)$ un point de $\mathbb{R}^2$.

(1) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ (sous forme implicite). De quel genre de courbe s'agit-il ?

(2) Donner l'équation de la tangente au point $t = \pi/4$.

(3) Déterminer les points $M_{\min}$ et $M_{\max}$ de $\mathcal{E}$ tels que la distance $d(M_0, M_{\min})$ soit minimum et la distance $d(M_0, M_{\max})$ soit maximum.

(4) Calculer l'aire du domaine entouré par $\mathcal{E}$.

(5) Utiliser le théorème de Green-Riemann pour le calcul de l'aire du domain entouré par $\mathcal{E}$ à l'aide d'une intégrale curviligne.