Math IV : Analyse (version du 24/05/2010) [1]

Page-web du cours : http ://math.univ-lyon1.fr/∼okra/2010-MathIV/
responsable de UE : Olga Kravchenko, bât Braconnier, 102 bis, 04 72 43 27 89,
okra@math.univ-lyon1.fr

Table des matières

1. Remerciements à Yoann Potiron, à Satia-Audrey Gontcho A Gontcho et à Gilles Marguin pour les corrections !

1. Chapitre I. Topologie d'un espace vectoriel réel

1.1. Espaces métriques, définition de la distance.

On note $\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{p \text{ fois}} = \{X = (x_1, \cdot, x_p) |\ x_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in [1, \cdots, p]\}$ - espace vectoriel réel de dimension p.

On s'intéresse aux fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Il faut d'abord étudier la structure du domaine D car le domaine est aussi important que la fonction. Pour cela on va définir une notion de distance.

Définition 1. Distance

Soit E un ensemble non-vide. On dit qu'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+,\ d : (x, y) \mapsto d(x, y)$ est une distance sur E si elle vérifie les trois axiomes suivants :

D1 (séparation) $\forall (x, y) \in E \times E,\ \{x = y\} \Leftrightarrow \{d(x, y) = 0\}$;

D2 (symétrie) $\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = d(y, x)$;

D3 (inégalité triangulaire) $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Définition 2. Espace métrique

On appelle espace métrique tout couple (E, d) où $E \neq \emptyset$ est un espace vectoriel et d est une distance.

Exemple 3. (1) $E = \mathbb{R},\ d(x, y) = |x - y|$

(2) $E = \mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction concave définie $\forall x \geq 0$, et t.q. $\{f(x) = 0\} \Leftrightarrow \{x = 0\}$. Alors $d(x, y) = f(|x - y|)$ est une distance. En effet, les propriétés D1 et D2 sont évidentes et D3 suit de la condition de concavité.

Une fonction est concave sur un intervalle I si $x_0, x_1, x_2, x_3 \in I$ et $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ alors, $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \geq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. (Géometriquement, c'est une remarque sur la relation entre les pentes de deux droites qui lient les points de coordonnées $(x_0, f(x_0)$ et $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2)$ et $(x_3, f(x_3))$. Faites un dessin !). Donc si on prend $x_0 = 0, x_1 = a, x_2 = b, x_3 = a + b$ on a $\frac{f(a)-f(0)}{a-0} \geq$

$\frac{f(a+b)-f(b)}{a+b-b}$. Mais $f(0) = 0$ alors, si $0 < a < b$ on a $f(a) \geq f(a+b) - f(b)$ et donc $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.

Du coup, on a beaucoup d'exemples de distances différentes sur $\mathbb{R}$. En particulier, $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ ou $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}.$ Le dernier exemple définit une distance sur $\mathbb{R}$ qui pour tous points est inférieure à 1.

(3) Métriques sur $E = \mathbb{R}^p$, soit $X = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $Y = (y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. On a $d_2(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^p |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$ (metrique euclidienne),
ou $d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^p |x_i - y_i|$,
ou $d_\infty(X,Y) = \sup_{i=[1,\cdots,p]} |x_i - y_i|$

(4) Soit E un ensemble quelconque. Pour $x, y \in E$ on définit $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Remarque : dans cet exemple (E,d) n'est pas un espace métrique.

1.2. **Boules ouvertes, fermées. Sphères. Parties bornées.**

Définition 4. Soit a un point de $\mathbb{R}^p$ et $r > 0$ un nombre réel.

(1) $\overline{B}(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(a,x) \leq r\}$ est appelée boule fermée de centre a et de rayon r.
(2) Une boule ouverte de centre a et de rayon r est $B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^p |\ d(a,x) < r\}$
(3) Une sphère de centre a et de rayon r est $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p |\ d(a,x) = r\}$

On obtient des boules de formes différentes pour des espaces métriques différents. Exercice : dessiner les boules dans $\mathbb{R}^2$ pour les distances d_1, d_2 et d_∞.

Définition 5. Une partie bornée P de $\mathbb{R}^p$ est une partie de $\mathbb{R}^p$ pour laquelle on peut trouver une boule (ouverte ou fermée) qui contient tous les points de P.

1.3. **Ouverts et Fermés.** .

Définition 6. Une partie ouverte (ou un ouvert) de R^p est une partie U t.q. $\forall u \in U$, $\exists r > 0$ tel que $B(u,r) \subset U$ c.à.d. tout point de U est le centre d'une boule ouverte, de rayon non-nul, incluse dans U.

Une partie fermée (ou un fermé) de $\mathbb{R}^p$ est une partie telle que son complémentaire U dans $\mathbb{R}^p$ est un ouvert.

Remarque 7. E et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

Proposition 8. Dans un espace métrique (E,d), (1) une boule ouverte est un ouvert, et (2) une boule fermée est un fermé.

Démonstration. (1) Soit $y \in B(a,r)$. Alors $\exists \epsilon > 0$ t.q. $d(a,y) < r - \epsilon$. Pour tout $z \in B(y,\epsilon)$, montrons que $z \in B(a,r)$, cela veut dire qu'autour de chaque point y de $B(a,r)$ il existe une boule ouverte entièrement contenue dans $B(a,r)$.
Par inégalité triangulaire $d(a,z) \leq d(a,y) + d(z,y) \Rightarrow d(a,z) < r - \epsilon + \epsilon = r$. Donc $z \in B(a,r)$, i.e. chaque point de $B(y,\epsilon)$ appartient à $B(a,r)$ et $B(y,\epsilon) \subset B(a,r)$.

(2) Soit $C\overline{B}(a,r)$ le complémentaire de $\overline{B}(a,r)$. Il faut montrer que $C\overline{B}(a,r)$ est un ouvert. Soit $y \in C\overline{B}(a,r)$. Montrons qu'il existe une boule contenant y entierement contenue dans $C\overline{B}(a,r)$.
Puisque y est en dehors de $\overline{B}(a,r), d(a,y) > r$. Soit $\epsilon = d(a,y) - r > 0$.

Pour tout $z \in B(y,\epsilon)$ montrons que $z \in C\overline{B}(a,r)$. En effet, par inégalité triangulaire $d(a,z)+d(z,y) \geq d(a,y) = r+\epsilon$. Donc $d(a,z) \geq r+\epsilon-d(z,y)$. Puisque $z \in B(y,\epsilon)$ on a $\epsilon > d(z,y)$ donc $d(a,z) > r+\epsilon-d(z,y) > r+\epsilon-\epsilon = r \Rightarrow z \in C\overline{B}(a,r)$. Donc $\overline{B}(a,r)$ est un complément d'un ouvert, c'est donc un fermé.

Définition 9. Soit E un ensemble non-vide et $P(E)$ l'ensemble de ses parties. On appelle <u>topologie induite par distance</u> (ou <u>topologie</u> tout court) l'ensemble des ouverts $\mathcal{T} \subset P(E)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) E et $\emptyset$ sont des éléments de $\mathcal{T}$
(2) Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ apartient à $\mathcal{T}$
(3) Toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$.

Définition 10. <u>Position d'un point par rapport à une partie de $\mathbb{R}^p$.</u>
Soit $A \in \mathbb{R}^p, a \in A$.

(1) On dit que a est <u>interieur</u> à A si on peut trouver un ouvert $U \in \mathbb{R}^p$ t.q. $a \in U$ et $U \subset A$. L'<u>interieur</u> de A, noté $\overset{o}{A}$, est le plus grand ouvert inclus dans A.
(2) On dit que a est <u>adhérent</u> à A si tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ contenant a rencontre A.
(3) On dit que a est un <u>point frontière</u> de A si tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ contenant a rencontre à la fois A et le complémentaire de A.
(4) L'adhérence de A, notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé qui contient A.

Définition 11. On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}^p$ est un <u>voisinage</u> de $x \in \mathbb{R}^p$ si V contient un ouvert contenant x.

Exercice. Démontrer l'équivalence avec une définition suivante : On dit que $V \subset \mathbb{R}^p$ est un voisinage de x ssi $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset V$.

1.4. **Normes des espaces vectoriels.**

Définition 12. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle <u>norme</u> sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui à $x \mapsto \parallel x \parallel \in \mathbb{R}_+$, et vérifie
N1 (séparation) $\forall x \in E, \parallel x \parallel = 0 \Leftrightarrow x = 0$
N2 (homogéniété positive) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in E, \parallel \lambda x \parallel = |\lambda| \cdot \parallel x \parallel$
N3 (inégalité triangulaire) $\forall x,y \in E, \parallel x+y \parallel \leq \parallel x \parallel + \parallel y \parallel$.
Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme est appellé espace vectoriel normé (e.v.n.)

Proposition 13. <u>Distance induite par une norme.</u> Soit E un e.v.n. L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ qui au couple (x,y) associe $d(x,y) := \parallel x-y \parallel$ est une distance sur E. On l'appelle distance induite sur E par la norme. Elle possède les propriétés suivantes
– $\forall x \in E,\ d(0,x) = \parallel x \parallel$
– $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in E^2,\ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$
– $\forall (x,y,z) \in E \times E \times E,\ d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

Remarque 14. Toute norme induit une distance, par contre toutes les distances ne proviennent pas d'une norme. La distance (4) de l'exemple 3 n'est induite par aucune norme (quelle propriétée de la norme n'est pas forcement satisfaite ?).

Exemple des normes sur $\mathbb{R}^p$. Soit $x \in \mathbb{R}^p,\ X = (x_1, \cdots, x_p),\ x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in [1, \cdots, p]$. Alors

$$\begin{aligned} \parallel X \parallel_1 &= \textstyle\sum_1^p |x_i| \text{ (norme de Manhattan)} \\ \parallel X \parallel_2 &= \left(\textstyle\sum_1^p |x_i|^2\right)^{1/2} \text{ (norme euclidienne)} \\ \parallel X \parallel_n &= \left(\textstyle\sum_1^p |x_i|^n\right)^{1/n} \\ \parallel X \parallel_\infty &= \max_{1 \leq i \leq p} |x_i| \end{aligned}$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^p$. La norme $\| X \|_2$ est appellée la norme euclidienne.

Définition 15. Normes équivalentes. Deux normes $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ sur R^p sont équivalentes si il existe deux constantes $\lambda > 0, \mu > 0$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^p, \lambda\|X\| \leq \|X\|' \leq \mu\|X\|$. On note $\| \cdot \| \sim \| \cdot \|'$.

Proposition 16. Cette définition induit une relation d'équivalence.

Démonstration.
- **reflexivité** : $\| \cdot \| \sim \| \cdot \|$
- **symétrie** : si $\lambda\|X\| \leq \|X\|' \leq \mu\|X\|$ alors $\frac{1}{\mu}\|X\|' \leq \|X\| \leq \frac{1}{\lambda}\|X\|'$.
- **transitivité** : $\lambda\|X\| \leq \|X\|' \leq \mu\|X\|$ et $\beta\|X\|' \leq \|X\|'' \leq \gamma\|X\|'$ implique $\beta\lambda\|X\| \leq \|X\|'' \leq \gamma\mu\|X\|$.

Exemple 17. Les normes $\| X\|_2 = \left(\sum_1^p |x_i|^2\right)^{1/2}$ et $\| X \|_\infty = \max_{1\leq i\leq p}|x_i|$ sont équivalentes. En effet, on a $\|X\|_2 \leq (p\cdot \|X\|_\infty^2)^{1/2} = \sqrt{p}\|X\|_\infty$. Soit $k \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $x_k = \max\{x_1, \cdots, x_p\} = \|X\|_\infty$, alors $\|X\|_\infty = (x_k^2)^{1/2} \leq \left(\sum_1^p |x_i|^2\right)^{1/2} = \|X\|_2$. Donc $\frac{1}{\sqrt{p}}\|X\|_2 \leq \|X\|_\infty \leq \|X\|_2$.

Exercice.
1. Montrer que toutes les normes $\| \cdot \|_n, n \in [1, +\infty]$ sont équivalentes.
2. Si $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ t.q. $\lambda\|X\| \leq \|X\|' \leq \frac{1}{\lambda}\|X\|$ et $\lambda\|X\|' \leq \|X\| \leq \frac{1}{\lambda}\|X\|'$.

Théorème 18. *Deux normes équivalentes induisent la même topologie.*

C.à d. si les normes sont équivalentes on trouve que deux ensembles

$$\mathcal{T} = \{U \in P(\mathbb{R}^p), U \text{ ouvert dans la norme} \| \cdot \|\}$$

et $\mathcal{T}' = \{U \in P(\mathbb{R}^p),\ U \text{ ouvert dans la norme} \| \cdot \|'\}$, sont égaux : $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Démonstration. Soit U un élément de $\mathcal{T}$, il faut montrer que c'est aussi un élément de $\mathcal{T}'$.
Cela se traduit :

Soit U un ouvert dans la norme $\| \cdot \| \Leftrightarrow \forall X \in U,\ \exists\varepsilon > 0$ tel que $B(X, \varepsilon) \subset U$. On va m.q. U est un ouvert dans la norme $\| \cdot \|'$. Pour tout $X \in U$ il faut montrer qu'il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $B'(X, \varepsilon')$, une boule dans la norme $\| \cdot \|'$ est un sous-ensemble de U. Pour cela on va trouver ε' tel que tout point Y de $B'(X, \varepsilon')$ appartienne aussi à $B(X, \varepsilon)$ et donc à U. Par équivalence des normes $\exists\lambda > 0$ tel que $\forall Z \in \mathbb{R}^p \|Z\| \leq \lambda\|Z\|'$. Soit $Y \in B'(X, \frac{\varepsilon}{\lambda})$ on a $\|X - Y\| \leq \lambda\|X - Y\|' < \lambda\frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$ donc $B'(X, \varepsilon) \subset U$. Donc si U est un ouvert pour $\| \cdot \|$, alors pour tout $X \in U$, il existe $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\lambda} > 0$ tel que $B'(x, \varepsilon') \subset U$. Donc U est un élément de $\mathcal{T}'$.

De la même manière on montre que si U est un élément de $\mathcal{T}'$ il l'est aussi de $\mathcal{T}$.

Théorème 19. *(Admis.) Sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 20. *On parle de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^p$ sans preciser la norme.*

Dans la suite, on notera $||.||$ sans préciser de quelle norme il s'agit.

2. Chapitre II. Fonctions de plusieurs variables.

2.1. **Fonctions de plusieurs variables. Graphes. Lignes de niveau.**

On s'intéresse maintenant aux fonctions $f :\ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. On distingue des fonctions scalaires : $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et des fonctions vectorielles : $\mathbb{R}^P \to \mathbb{R}^q, q > 1$.

On va commencer par l'étude des fonctions de deux variables. Une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles fait correspondre à tout point $X = (x, y)$ de D, (appelé le domaine de définition de F) un réel unique $f(X)$.

Définition 21. Soit $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$.

(1) L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}.$$

est appelé la surface représentative de f. S est aussi appelé le graphe de la fonction f.

(2) Soit $A = (a, b)$ un point interieur de D. Les fonctions $x \mapsto f(x, b)$ et $y \mapsto f(a, y)$ définies sur des intervalles ouverts, contenant respectivement b et a sont appelées les fonctions partielles associées à f au point A.

(3) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble $L_k = \{(x, y) \in D \text{ tel que } f(x, y) = k\}$ est la ligne de niveau k de la fonction f.

Remarque 22. Pour les fonctions de trois variables, la notion analogue à la ligne de niveau est celle de surface de niveau (Formulez-là !)

Les lignes de niveau et les fonctions partielles sont utiles pour dessiner les graphes des fonctions.

Exemple 23. A. $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ sur $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$. On calcule et représente des lignes de niveau $k = 0, k = 1, k = 2, k = 4, k = -1$. Pour $k = 0$ c'est un seul point $(0, 0)$, avec la valeur de la fonction 0, pour $k = 1, 2, 4$ on obtient des ellipses. Par exemple aux points de l'ellipse $4x^2 + y^2 = 1$ la fonction a la valeur 1, etc. La ligne de niveau $k = -1$ est l'ensemble vide (la fonction ne prend pas la valeur -1 en aucun point).

Au point $(0, 0)$ les fonctions partielles sont $x \mapsto 4x^2$ et $y \mapsto y^2$.

B. Sur $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$ et $x \neq 0$ on considère la fonction $f(x, y) = y/x$ avec ses lignes de niveau $k = 0, 1, -1, 2, -2$. Ce sont des intervalles des droites $y = 0,\ y = x,\ y = -x,\ y = 2x,\ y = -2x$ avec un point $x = y = 0$ enlevé. La valeur de la fonction sur la droite $y = x$ est égale à 1, sur $y = -x$ est égale à -1 etc...

2.2. **Notion de la limite.** Une fois qu'on a les normes et les voisinages, la définition de limite est la même que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Définition 24. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ et $A \in \mathbb{R}^p$. On dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = A$ ssi $\forall V$ voisinage de A, $\exists N_V \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_V \Rightarrow X_n \in V$. C'est à dire $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|X_n - A\| \leq \varepsilon$.

Lien avec les limites de $\mathbb{R}$:

Propriété 25. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_n^1, \ldots, x_n^p))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^p$ et $A = (a^1, \ldots, a^p) \in \mathbb{R}^p$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = A$ ssi $\forall i = 1, \ldots, p,\ \lim\limits_{n \to +\infty} x_n^i = a^i$.

Définition 26. Soit $f :\ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. On dit que f a une limite $L \in \mathbb{R}^q$ en A ssi $\forall\, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de D telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = A$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(X_n) = L$.

Il y a une autre définition d'une limite d'une fonction utilisant $\varepsilon - \delta$ qui est équivalente à la définition 26.

Définition 27. Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$ et A un point adhérent à D, L un point de $\mathbb{R}^q$. On dit que f a pour limite L lorsque $X \to A$ si pour $\forall \varepsilon > 0$ il $\exists \delta > 0$ tel que $\|X - A\| \leq \delta$ et $X \in D$ entraine $\|f(X) - L\| \leq \varepsilon$.

Remarque 28.

(1) La notion de limite ne dépend pas des normes utilisées (pourquoi ?).

(2) La limite, si elle existe, est unique (trivial mais très important).

(3) La limite partielle : soit $D_1 \subset D$ un sous-ensemble et A un point adhérent à D_1. Si $f(X)$ tend vers L lorsque X tend vers A en restant dans D, alors $f(X)$ tend vers la même limite L si X tend vers A en restant dans D_1. En particulier, si on regarde le comportement des fonctions partielles au même point, elles doivent toutes avoir la même limite (si elle existe, bien sûr).

Nous avons les propriétés suivantes des limites de fonctions :

Proposition 29. Soient f et g des fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}^q$, $X \in D$ et A un point adhérant à D.

(1) $\lim_{X\to A} (f(X) \pm g(X)) = \lim_{X\to A} f(X) \pm \lim_{X\to A} g(X)$

(2) $\lim_{X\to A} f(X)g(X) = \lim_{X\to A} f(X) \cdot \lim_{X\to A} g(X)$

(3) si $\lim_{X\to A} f(X) \neq 0$ on a

$$\lim_{X\to A} \frac{1}{f(X)} = \frac{1}{\lim_{X\to A} f(X)}.$$

(4) Composition. Soient les fonctions $g_i : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $i = 1, \cdots, p$ et B un point adhérent à E et $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, si $\lim_{Y\to B} g_i(Y) = a_i$, $A = (a_1, \cdots, a_p)$ un point adhérant à D alors $\lim_{Y\to B} f(g_1(Y), \cdots, g_p(Y)) = \lim_{X\to A} f(X)$.

(5) Majoration. Si $\lim_{X\to A} g(A) = 0$ et $\|f(X) - C\| \leq g(X), C \in \mathbb{R}^q$ pour tout X au voisinage de A, alors $\lim_{X\to A} f(X) = C$.

La preuve de cette proposition répète la preuve d'une proposition analogue pour des fonctions d'une variable - il faut juste utiliser les normes à la place de valeurs absolues.

2.3. **Continuité.**

Définition 30. La fonction est continue en un point $A \in D$ si la limite de f en ce point existe et est égale à la valeur de la fonction en A.

La fonction est continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Ou bien on peut reformuler cette définition à l'aide des suites :

Définition 31. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. On dit que f est continue en A ssi $\forall\, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de D telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = A$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(X_n) = f(A)$.

Propriété 32. Opérations sur les fonctions continues : suite à la Proposition 29 la somme, le produit et le quotient (là où le dénominateur ne s'annule pas) des fonctions continues sont continus. La composée des fonctions continues est continue.

Remarque 33. Toute fonction obtenue à l'aide des fonctions continues élémentaires des variables $(x_1, \cdots, x_p)$ en utilisant les opérations algébriques et la composition est continue dans son domaine naturel de définition. Exemples : des polynômes $x^k y^n$, exponentielles e^{2x+xy}, trigonométriques $\sin(xy)$ etc sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Attention : $\dfrac{1}{x^n y^m}, n, m > 0$ n'est pas un polynôme (et n'a jamais été).

Il peut être pratique de fixer toutes les composantes sauf une :

Définition 34. Soit $f:\ D\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$. Soit $X_0=(x_0^1,\dots,x_0^p)\in D$. Pour $i=1\dots,p$, on appelle <u>i-ème fonction partielle</u> de f en X_0 la fonction :

$$f_{X_0,i}:\begin{cases} D_i\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^q\\ x\mapsto f(x_0^1,\dots,x,\dots,x_0^p)\end{cases}$$

où x est à la i-ème place, et D_i est tel que pour $x\in D_i$, $(x_0^1,\dots,x,\dots,x_0^p)\in D$.

Proposition 35. Si f est continue en $x_0=(x_0^1,\dots,x_0^p)$ alors $\forall i=1\dots,p$, la fonction partielle $f_{x_0,i}$ est continue en x_0^i.

Remarque 36. La réciproque est fausse !

Exemple 37. On considère une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie de la façon suivante

$$f:\ (x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\ \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0 \text{ si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Ses 2 fonctions partielles en $(0,0)$ sont

$$f_{(0,0),1}:\ x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0}\ \text{si } x\neq 0,\\[2ex] 0 \text{ si } x=0,\end{cases}$$

et

$$f_{(0,0),2}:\ y\mapsto\begin{cases}\dfrac{0\cdot y}{0+y^2}\ \text{si } y\neq 0,\\[2ex] 0 \text{ si } y=0.\end{cases}$$

Elles sont donc <u>continues</u>. Pourtant f <u>n'est pas continue</u> en $(0,0)$:

Soient $x_n=y_n=1/n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$, mais $f(x_n,y_n)=\dfrac{1/n^2}{2/n^2}=\dfrac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n,y_n)\neq 0=f(0,0)$.
Une autre démonstration du fait que f n'est pas continue en $(0,0)$: prenons une restriction de f sur la droite D_1 définie par l'équation $y=x$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(f(x,y)\big|_{D_1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{xx}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

Donc la fonction f restreinte à un sous-ensemble D_1 de $\mathbb{R}^2$ n'a pas la même limite que la même fonction restreinte à deux autres sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$. (Les fonctions partielles $f_{(0,0),1}$ et $f_{(0,0),2}$ sont des restrictions de f aux droites $y=0$ et $x=0$ respectivement). Or la limite, si elle existe, doit être unique (remarque 28), donc la limite n'existe pas.

Etude de continuité des fonctions :

Exemple 38.

(1) On considère $f(x,y)=x^2+y^2$. On va montrer que pour toutes valeurs $(x,y)=(a,b)$ la limite de $\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$ existe et est égale à la valeur au point $f(a,b)=a^2+b^2$. Si $(x,y)\to(a,b)$ (par exemple dans une norme euclidienne) cela veut dire que $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\to 0$ donc on a :

$$(x-a)^2+(y-b)^2\to 0\Leftrightarrow\begin{cases}x-a\to 0\\ y-b\to 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\to a\\ y\to b\end{cases}$$

Donc $\lim_{(x,y)\to(a,b)}x^2+y^2=a^2+b^2$, c'est exactement ce qu'on cherche a montrer, et alors la fonction est continue en chaque point. D'habitude on ne vérifie pas la continuité en chaque point comme dans cet exemple - aux points réguliers on utilise plutôt les propriétés des fonctions continues.

(2) Prenons un autre exemple :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 3, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

alors $f(a,b) = \dfrac{y}{x}$ pour $x \neq 0$ étant une fraction de fonctions continues est continue mais pour $x = 0$ sur les droites $y = kx$ on obtient des limites différentes quand $x \to 0$. On conclut que la fonction n'est pas continue en $(0,b)$, $\forall b \in \mathbb{R}$. Il y a une droite des points de discontinuité. Cette droite a pour équation $x = 0$.

Définition 39. Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. Soit A un point adhérent à D n'appartenant pas à D. Si f a une limite L lorsque $X \to A$ on peut étendre le domaine de définition de f à $D \bigcup \{A\}$ en posant $f(A) = L$. On dit que l'on a prolongé f par continuité au point A.

Théorème 40. *(Admis) Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue*
(2) *Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$*
(3) *Pour tout fermé F de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$*
(4) *Pour toute suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D \subset \mathbb{R}^p$ convergeant vers A, $f(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(A)$ pour tout $A \in D$*

2.4. **Coordonnées polaires.** Notation : $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. On a une application bijective de $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ vers $\mathbb{R}^2$ donné par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{cases} \tag{1}$$

Son application réciproque est l'application de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ suivante :

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ t &= \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{2}$$

Donc en particulier, on a $r^2 = x^2 + y^2$. Dans certains exemples d'étude de continuité des fonctions il est utile de passer aux coordonnées polaires.

Etude de continuité à l'aide de coordonnées polaires

Exemple 41.

(1) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction de fonctions continues. En $(0,0)$ on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2 t - r^2\sin^2 t}{r^2}.$$

Cette limite est égale à $\cos^2 t - \sin^2 t$. Le résultat dépend de t, i.e. il n'y a pas de limite unique, donc la limite n'existe pas et f n'est pas continue en $(0,0)$.

(2) Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$g : \ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant qu'une fraction des fonctions continues. En $(0,0)$ on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\to 0} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3 t}{r^2}$$

Cette limite est égale au produit des limites : $\lim_{r\to 0}(\cos^3 t) \lim_{r\to 0} r = 0$, car $|\cos t| \leq 1$ - une fonction bornée. Finalement, la fonction g est continue en $(0,0)$ et donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2.5. **Propriétés des fonctions continues sur un compact.**

Définition 42. Une partie compacte (un compact) de $\mathbb{R}^p$ est une partie fermée et bornée.

Il existe au moins deux differentes façons de définir un compact dans un espace normé, mais en $\mathbb{R}^p$ elles sont équivalentes à celle qu'on donne ici.

Exemple 43. Dans $\mathbb{R}$ - un intervalle fermé, dans $\mathbb{R}^p$ - boules fermées sont des exemples des compacts etc.

Théorème 44. *(Admis) Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une fonction* continue *sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$ et K une partie compacte de $\mathbb{R}^p$ contenue dans D. Alors, $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^q$.*

Corollaire 45. *Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.*

Cela signifie que sur un compact $K \in \mathbb{R}^p$ il existe au moins un point $X_m \in K$ et au moins un point $X_M \in K$ tels que pour tout $X \in K$ on ait $f(X_m) \leq f(X) \leq f(X_M)$.

2.6. **Connexe par arc. Théorème des valeurs intermediaires.**

Définition 46. On dit qu'une partie Γ de $\mathbb{R}^p$ est un arc continu si on peut trouver une application continue γ d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ dont l'image soit Γ. γ est appelé un paramétrage de Γ. Les points de Γ, $A = \gamma(a)$ et $B = \gamma(b)$ s'appellent des extremités de Γ.

Attention : Γ est un objet géometrique tandis que γ, une fonction continue, est un objet analytique. Un arc continu a une infinité de paramétrages possibles.

Définition 47. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$. On dit que E est connexe par arc si, étant donné deux points arbitraires de E on peut trouver un arc continu Γ, d'extremités A, B entièrement contenu dans E.

Théorème 48. *(des valeurs intermediaires) Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$ connexe par arc. Soit A, B deux points de D. Pour tout nombre réel r compris entre $f(A)$ et $f(B)$ il existe un point C de D tel que $f(C) = r$.*

Démonstration. Soit $\gamma : [a,b] \to D$ un paramétrage d'un arc continu tel que $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$. La fonction $f \circ \gamma \ : I \to \mathbb{R}$ est continue étant une composition des fonctions continues donc $\exists c \in [a,b]$, tel que $f \circ \gamma(c) = r$. Soit $C = \gamma(c)$, alors $C \in D$ et $f(C) = r$.

3. Chapitre III. Calcul Differentiel

3.1. **Dérivées. Matrice jacobienne. Gradient.**

Rappel. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$. La dérivée de f au point $a \in I$ est :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3}$$

Soit $f :\ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. Une expression du type "$\lim\limits_{X\to A} \dfrac{f(X) - f(A)}{X - A}$" n'a aucun sens parce que diviser par $X - A$, qui est un vecteur de $\mathbb{R}^p$, n'a aucun sens ! Néanmoins, si on fixe toutes les composantes de xX sauf une, on peut définir des **dérivées partielles.**

Définition 49. Soit $f :\ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. Pour $i = 1, \dots, p$, on appelle dérivée partielle par rapport à x_i de f en $A = (a_1, \cdots a_p)$, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$, ou bien $f'_{x_i}(A)$, la dérivée de la fonction partielle $f_{A,i}$ prise en a_i : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f'_{A,i}(a_i)$.

Pour une fonction de deux variables $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en point $A = (a, b) \in D$ les dérivées partielles de $f(x, y)$ en (a, b) sont les dérivées des fonctions partielles $f(x, b)$ et $f(a, y)$ qui se calculent alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

Parfois, on les notes aussi $f'_x(a, b)$ et $f'_y(a, b)$.

Exemple 50. Soit $f(x) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$. Calculer les dérivées partielles au point $(1, 2)$. En considérant y constant et en dérivant par rapport à x on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(1,2)} = (4x - 3y)\Big|_{(x,y)=(1,2)} = -2$$

En considérant x constant et en dérivant par rapport à y on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(1,2)} = (-3x + 8y)\Big|_{(x,y)=(1,2)} = 13$$

Définition 51. La matrice de dérivées partielles de $f\ : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ s'appelle la matrice jacobienne ou la Jacobienne de f.

La matrice jacobienne $Jac(f)(X_0)$ fait passer de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$: elle a p colonnes et q lignes.

$$Jac(f)(X_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_1}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f_q}{\partial x_p}(X_0) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Pour une fonction de n variables à valeurs réelles, la matrice jacobienne est juste une matrice-ligne :

$$Jac(f)(x_1, \cdots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Sa matrice transposée - la matrice-colonne :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, \cdots, x_n) = {}^{\dagger}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

s'appelle le gradient de f.

3.2. **Propriétés des dérivées partielles.** Les dérivées partielles d'une fonction qui est obtenue par des opérations algébriques sur d'autres fonctions (somme, produit, fraction) suivent les mêmes règles.

Si une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est obtenue par des opérations algébriques (somme, produit, fraction) sur les fonctions $g, h : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, ses dérivées partielles peuvent être obtenues à partir des dérivées partielles de g et h par les formules de dérivée de somme, produit, fraction habituelles ($(u+v)' = u' + v'$ etc.)

Les dérivées partielles d'une composition de fonctions sont plus compliquées.

Rappel : règle de chaine. Soit $g : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}, g : x \mapsto g(x),\ h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h : y \mapsto h(y)$ et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f : x \mapsto h(g(x))$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=g(x_0)} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$$

Proposition 52. Soient

$$\begin{array}{ll} g: & D \subset \mathbb{R}^p \to E \subset \mathbb{R}^m, g : X \mapsto g(X) = (g_1(X), \cdots, g_m(X)), \\ h: & E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q, h : Y \mapsto h(Y) = (h_1(Y), \cdots, h_q(Y)), \\ f: & D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, f : X \mapsto h(g(X)) = f(X) = (f_1(X), \cdots f_q(X)) \end{array}$$

les fonctions telles que g en $X_0 \in D$ et h en $g(X_0) \in E$ sont les fonctions continument dérivables (i.e. les dérivées partielles existent et sont continues) alors pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}, j \in \{1, \cdots, q\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X_0) = & \ \frac{\partial (h \circ g)_j}{\partial x_i}(X_0) \\ = & \ \frac{\partial h_j}{\partial y_1}(g(X_0))\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(X_0) + \cdots + \frac{\partial (h_j)}{\partial y_m}(g(X_0))\frac{\partial g_m}{\partial x_i}(X_0) \end{aligned} \tag{5}$$

ce qui nous donne les entrées d'une matrice jacobienne de f qui est un produit des matrices jacobiennes de h et g.

En particulier, si

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (y_1, y_2) \mapsto h(y_1, y_2) \text{ et } g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2,\ X \mapsto (g_1(X), g_2(X))$$

pour $f = h \circ g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial (f)}{\partial x_i}(X_0) = \frac{\partial (h \circ g)}{\partial x_i}(X_0) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(g(X_0))\frac{\partial (g_1)}{\partial x_i}(X_0) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(g(X_0))\frac{\partial (g_2)}{\partial x_i}(X_0)$$

Exemple 53. Soit $f(x) = e^x \sin^2 x$. On peut voir f comme une composition de deux fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, g(x) = (e^x, \sin x)$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(y_1, y_2) = y_1 \cdot (y_2)^2$.

On a deux façons de calculer la dérivée de f - directement ou en utilisant la Proposition (52) :

$$\begin{aligned} f'(x) \ & = \frac{\partial (y_1 \cdot (y_2)^2)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial (y_1)}{\partial x} + \frac{\partial (y_1 \cdot (y_2)^2)}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial (y_2)}{\partial x} \\ & = (y_2)^2 e^x + 2y_1 y_2 \cos x = \sin^2 x \cdot e^x + 2e^x \sin x \cos x. \end{aligned}$$

3.3. **Derivées partielles d'ordre superieur. Fonctions de classe C^k. Théorème de Schwarz.** Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Les dérivées partielles définissent p nouvelles fonctions

$$f'_{x_i}(x_1, \cdots, x_p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_p).$$

On peut regarder les fonctions partielles de chaqune de ces nouvelles fonctions. Cela nous donne les dérivées partielles d'ordre 2 (aussi appellées les dérivées partielles secondes) et à leur tour on peut regarder les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre 2 etc. Cela s'écrit par exemple :

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

Définition 54. Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est de classe C^k est une fonction dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues. Une fonction est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 55. ***(Schwarz)*** *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur D. Les fonctions de dérivées partielles d'ordre 2, $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ sont égales en tout point de D.*

Remarque 56. Le théorème de Schwarz implique que les dérivées partielles d'ordre $k,\ k \geq 2$, d'une fonction de classe $C^k,\ f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ ne dependent pas de l'ordre dans lequel les dérivées partielles sont prises. Par exemple, pour une fonction de deux variables $f(x, y)$ de classe C^3, on a : $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

3.4. **Différentielle.** (Chapitre 2 de [2].)

Lors de l'equation(3) en essayant de généraliser l'expression pour la dérivée d'une fonction d'une variable aux fonctions de plusieurs variables, nous avons introduit les fonctions de dérivées partielles, qui sont utiles et revellent certaines informations sur le comportement de la fonction mais n'apportent pas toute l'information.

Exemple 57. On considère à nouveau l'exemple 37. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$f :\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

On cacule sa dérivée partielle par rapport à x :

– $\forall (x_0, y_0) \neq (0, 0),\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(\frac{x y_0}{x^2 + y_0^2}\right)'\Big|_{x=x_0} = \frac{y_0^3 - x^2 y_0}{(x^2 + y_0^2)^2}\Big|_{x=x_0} = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$.

– $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ est la dérivée de $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0, \end{cases}$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$.

On voit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe, de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe et vaut 0, et pourtant f n'est même pas continue en $(0, 0)$. Donc les dérivées partielles ne suffisent pas à décrire la régularité de la fonction.

Nous allons réécrire l'équation (3) sans division et la généraliser aux fonctions de plusieures variables.

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q,\ A \in D$. Au voisinage de A on a :

$$f(A+H) - f(A) = df(A)(H) + r(H), \text{ où } r(H) = o(\|H\|). \tag{6}$$

Ici, $H \in \mathbb{R}^p$, et $df(A)$ une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, i.e. $df(A)(H) \in \mathbb{R}^q$ et le reste, $r(H) = o(\|H\|)$, dit "petit o" de $\|H\|$, est une fonction $r : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, qui est petit par rapport à H. On peut comparer leurs normes :

$$\lim_{\|H\|\to 0} \frac{\|r(H)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|H\|_{\mathbb{R}^p}} = 0.$$

Si elle existe, l' application linéaire $\mathrm{d}f(A)$ est unique. On la note selon les auteurs ou les circonstances :

$$L = Df(A) \text{ ou } \mathrm{d}f(A) \text{ ou } D_A f \text{ ou } \mathrm{d}_A f, \text{ la différentielle en } A.$$

L'application $df(A)$, si elle existe, est donnée par la matrice jacobienne. En effet, la différantiabilité entraine l'existence des dérivées partielles. On peut le voir sur l'exemple d'une fonction f à p variables à valeurs réelles. Par définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_i + h_i, \cdots, a_p) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_p)}{h_i}.$$

Par définition de la différentielle on a aussi

$$\frac{f(a_1, \cdots, a_i + h_i, \cdots, a_p) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_p)}{h_i} = \frac{\mathrm{d}f(A)(H) + r(H)}{h_i}$$

Ici H est le vecteur transposé de $(0, \cdots, h_i, \cdots, 0)$. Donc $r(H) = o(\|H\|) = o(h_i)$ et

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{\mathrm{d}f(A)(H) + r(H)}{h_i} = \lim_{h_i \to 0} \frac{\mathrm{d}f(A)(H)}{h_i}.$$

Donc ici

$$\mathrm{d}f(A)\ {}^{\dagger}(0, \cdots, 0, h_i, 0, \cdots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \cdot h_i$$

et par linéarité

$$\mathrm{d}f(A)\ {}^{\dagger}(h_1, \cdots, h_i, \cdots, h_p) = \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \cdot h_i$$

Dans les exercices de nature théorique, la différentiabilité sera souvent établie en montrant directement par des majorations, que le reste $r(H)$ est un $o(\|H\|)$. Mais si f est donnée explicitement au moyen des fonctions usuelles, on va plus vite en constatant simplement l'existence et la continuité de ses dérivées partielles. Une fonction est différentiable si elle est de classe C^1.

Propriété 58. Soit $f :\ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $X_0 \in D$. Si $\forall i = 1, \ldots, p$, $\forall j = 1, \ldots, q$, $X \mapsto \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)$ *existe au voisinage de* X_0 *et est continue en* X_0, alors f est différentiable en X_0.

En termes moins précis, que j'ai pris du livre [2] et que je pense, essentiel pour la comprehension du cours, c'est la GRANDE IDÉE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL :

$$\begin{pmatrix} \text{accroissement} \\ \text{de la fonction} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{terme linéaire par rapport à} \\ \text{l'accroissement de la variable} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{petit terme} \\ \text{correctif} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Proposition 59. Propriétés de la différentielle.

(1) **Continuité.** Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

(2) **Linéarité.** Soient $f, g : D \to \mathbb{R}^q$ deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. Si f et g sont différentiables en $A \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $d(f+g)(A) = df(A) + dg(A)$ et $d(\lambda f)(A) = \lambda df(A)$.

(3) **Composition.** Soient $g : D \to E \subset \mathbb{R}^m$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$ et différentiable en $A \in D$, et $h : E \to \mathbb{R}^q$ différentiable en $g(A)$, alors $h \circ g$ est différentiable en A et la différentielle $d(h \circ g)(A) = dh(g(A)) \circ dg(A)$

La composition suit de la formule (6) :

$$\begin{aligned} h(g(A+H)) - h(g(A)) = & \quad dh(g(A))(f(A+H) - f(A)) + \text{ petit reste} \\ = & \quad dh(g(A))df(A)H + \text{ un autre petit reste} \end{aligned}$$

En pratique c'est donné par le produit des matrices jacobiennes (comparer avec l'équation (5)).

Regardons maintenant une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Soit $(x,y) \in D$. On remarque que la différentielle d'une fonction $(x,y) \to f(x,y)$ au point (x,y) est égale à :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Exemples :

(1) On reprend : soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante

$$f:\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On sait que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ parce qu'elle n'est même pas continue. Comment se comportent ses dérivées partielles au voisinage de $(0,0)$?

On a vu que si $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{y_0(y_0^2 - x_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^2}$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est bien définie au voisinage de $(0,0)$, mais elle n'est pas continue : si $x_n = 1/n$ et $y_n = 2/n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = \dfrac{2/n^2}{(1/n^2+4/n^2)^2} = \dfrac{2/n^2}{25/n^4}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) \neq 0$.

(2) Soit

$$f:\ \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \\ (x,y) \mapsto (x^2y^2, x+y) \end{cases}$$

Est-elle différentiable en $(2,3)$?

Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f^1}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0y_0^2$, $\dfrac{\partial f^1}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0x_0^2$, $\dfrac{\partial f^2}{\partial x}(x_0,y_0) = 1$, $\dfrac{\partial f^2}{\partial y}(x_0,y_0) = 1$.

Toutes ces dérivées partielles sont continues en $(2,3)$ donc f est différentiable en $(2,3)$. On a $Jac(f)(2,3) = \begin{pmatrix} 36 & 24 \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

est-elle différentiable en 2 ? Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 2x_0$. Elle est continue en 2 donc f est différentiable en 2 et $Jac(f)(2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(2) = f'(2) = 4$.

4. Chapitre IV. Propriétés géométriques des fonctions de plusieures variables

4.1. **Dérivée directionnelle.**

Définition 60. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $A \in D$ et $\overrightarrow{V}$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$. On dit que f a une dérivée au point A en suivant le vecteur V si l'expression :

$$D_{\overrightarrow{V}} f(A) := \lim_{t \to 0} \frac{f(A + t\overrightarrow{V}) - f(A)}{t}$$

existe. $D_{\overrightarrow{V}} f(A)$ s'appelle la dérivée directionnelle de f en A en direction de vecteur $\overrightarrow{V}$.

Remarque 61. Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont des dérivées directionnelles de f en A en direction de vecteurs e_i, vecteurs de base de coordonnées $e_i = \quad {}^{\dagger}(v_1, \cdot, v_p)$:

$$v_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 62. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, de classe C^1, en $A \in D$ et $\overrightarrow{V}$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Alors,

$$D_{\overrightarrow{V}} f(A) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(A) \cdot \overrightarrow{V} \tag{8}$$

Preuve. On va demontrer cette proposition pour le cas $p = 2$. La généralisation au cas $p > 2$ est assez directe. Soit $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{V} = \lambda\overrightarrow{i} + \mu\overrightarrow{j}$ et $A = (x_0, y_0) \in D \in \mathbb{R}^2$. Soit une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $u(t) = (x_0, y_0) + t\overrightarrow{V} = \left(x_0 + \lambda\overrightarrow{i}, y_0 + \mu\overrightarrow{j}\right) := (x(t), y(t))$. On considère une fonction d'une variable à valeurs réelles : $F(t) = f(u(t))$. C'est une fonction composée. Sa dérivée en 0 :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(0) &= \frac{\mathrm{d}(f \circ u)}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \frac{\partial x(t)}{\partial t}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t}(0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \lambda + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \mu = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \overrightarrow{V} \end{aligned}$$

car $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}(x_0+\lambda t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \lambda$ et $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}(y_0+\mu t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \mu$. De l'autre coté

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(u(t))-f(u(0))}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+\lambda t, y_0+\mu t)-f(x_0,y_0)}{t} := D_{\overrightarrow{V}}f(x_0,y_0)\end{aligned}$$

D'où la relation (8).

4.2. **Gradient.** Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Son gradient, pris en tout point de D définit une fonction à valeurs vectorielles $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, noté aussi :

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y).$$

Propriété [a] : Le gradient est perpendiculaire à la ligne de niveau

Soit $(x,y) \in D$, alors (x,y) appartient à une ligne de niveau $L_a(f)$ où $a = f(x,y)$.

Théorème 63. *Le vecteur gradient $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$ est normale à la courbe $L_a(f)$ au point (x,y).*

Preuve. Soit $(x+h, y+k) \in L_a(f)$ un point de voisinage de (x,y).

Alors, $f(x+h,y+k) - f(x,y) = 0$ car les valeurs de f en ces deux points sont egales, ces points appartenant à la même ligne de niveau. De la grande idée du calcul différentiel (7) on a :

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) - f(x,y) = &\ df(x,y)\cdot\begin{pmatrix} h \\ k\end{pmatrix} + o(\|(h,k)\|)\\ = &\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot k + o(\|(h,k)\|).\end{aligned}$$

On a $\lim_{(h,k)\to 0} o(\|(h,k)\|) = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot k \to 0$ quand $(x+h, y+k) \to (x,y)$. Quand $(x+h,y+k) \to (x,y)$ tout en restant sur $L_a(f)$, le vecteur (h,k) est un vecteur tangent à $L_a(f)$. On a trouvé alors que le produit scalaire de $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ et (h,k) égal 0, on en déduit que ces deux vecteurs sont orthogonaux.

Exemple 64. A. $f(x,y) = x^2+y^2$. $L_a(f) = C((0,0), \sqrt{a})$ - cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{a}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$. On remarque que $(2x,2y) = 2(x,y)$ est 2 fois le vecteur radial qui est en effet orthogonal au cercle.

B. Soit la courbe d'équation $x^2 - y = 0$. Pour calculer la normale en chaque point de cette courbe, on la voit comme une ligne de niveau 0 de la fonction $f(x,y) = x^2 - y$. La normale est donc donnée par son gradient : $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1\end{pmatrix}$.

Propriété [b] : Le gradient indique la ligne de plus grande pente

Sur le graphe de la fonction f on prend un point $(x,y,f(x,y))$, alors (x,y) est sur la ligne de niveau $a = f(x,y)$.

Théorème 65. *Le gradient en (x,y) indique la direction de plus grande pente ≥ 0 sur Γ_f à partir d'un point en question.*

Preuve.

$$f((x,y)+\overrightarrow{v})-f(x,y)=\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\cdot\overrightarrow{v}+o(\|\overrightarrow{v}\|)$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{\nabla}f(x,y)\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta$, où *theta* est l'angle entre les deux vecteurs. L'accroissement de la fonction atteint le maximum quand $\cos\theta=1$, alors $\overrightarrow{v}$ doit être parallèle à $\overrightarrow{\nabla}f(x,y)$.

Remarque 66. En suivant la ligne de plus grande pente dans D on a, sur le graphe, le chemin le plus court à parcourir pour obtenir une variation donnée de f. Autrement dit, si on veut passer le plus vite possible du niveau a au niveau b à partir d'un point (x,y) donné de niveau $a=f(x,y)$, il faut suivre le gradient.

4.3. Formule de Taylor.

Rappel : petit o. Soient f et g deux fonctions d'une variable à valeurs réelles. On dit que $g=o(f)$ au point a si :

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

Exemple : $u(x)=x^3, v(x)=x^2+2x$. En $a=0$ on a $u(x)=o(v(x))$ et en $a=+\infty$ on a $v(x)=o(u(x))$.

Rappel : La formule de Taylor avec le reste en forme de Lagrange. Si f est $n+1$ fois différentiable en a, on a une approximation de f par un polynôme :

$$f(a+t)=f(a)+f'(a)t+\cdots\frac{f^{(n)}(a)}{n!}t^n+r_n(a,t)$$

où il existe $\theta\in[a,a+t]$ tel que $r_n(a,t)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}t^{n+1}$. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis : si f est continue et dérivable sur l'intervalle $[a,b]$, alors $\exists x_0\in[a,b]$ tel que $f(b)=f(a)+f'(x_0)(b-a)$.

Finalement, on a aussi **la formule de Taylor-Young** avec $r_n(a,t)=o(t^n)$:

$$f(a+t)-f(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}t^k+o(t^n)$$

C'est cette formule qu'on va généraliser au cas de plusieurs variables.

Théorème 67. *(Formule de Taylor) Soit $f:D\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ de classe C^n au voisinage de point $A(a_1,a_2,\cdots a_p)\in D$. Soient $H(h_1,\cdots,h_p)\in\mathbb{R}^p$ et l'intervalle $[A,A+H]\subset D$. Alors,*

$$f(A+H)-f(A)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left((h_1\partial_1+\cdots h_p\partial_p)^k f\right)(A)+o(\|H\|^n)$$

Preuve.

Soit $F(t)=f(A+tH)$ la fonction composée d'une variable à valeurs réelles. On va utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour cette fonction. Pour cela on remarque que :

$$F'(t)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f(A+tH)}{\partial x_i}\cdot\frac{\mathrm{d}(a_i+th_i)}{\mathrm{d}t}.$$

Désormais on va utiliser les notations $\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Pour la k-ème dérivée de la fonction composée $F(t)$ on a :

$$F^{(k)}(t) = \sum(\partial_{i_k} \cdots (\partial_{i_1} f(A+tH)) \cdots) \frac{\mathrm{d}(a_{i_1} + th_{i_1})}{\mathrm{d}t} \cdots \frac{\mathrm{d}(a_{i_k} + th_{i_k})}{\mathrm{d}t}$$

où on prend la somme sur tout $i_1 \in \{1, \cdots, p\}, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, p\}$. Cette formule se reécrit :

$$F^{(k)}(t) = (h_1\partial_1 + \cdots + h_p\partial_p)^k f(A+tH)$$

La formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $f(t)$ en $t=0$:

$$F(t) = F(0) + F'(0) + \cdots \frac{1}{n!} F^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta)t^{n+1}, \ \theta \in [0, t]$$

Pour $t = 1$ on a :

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \cdots \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta), \ \theta \in [0, 1]$$

D'où :

$$f(a_1+h_1, \cdots, a_p+h_p) = f(a_1, \cdots, a_p) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(h_1\partial_1 + \cdots + h_p\partial_p)^k f(A+H) + r_n(A, H)$$

Le dernier terme est le reste :

$$r_n(A, H) = \frac{1}{(n+1)!}(h_1\partial_1 + \cdots + h_p\partial_p)^{n+1} f(A+\theta H) \equiv o(\|H\|^n).$$

Alors la formule de Taylor à l'ordre 2 est la suivante :

$$f(A+H) = f(A) + \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a)h_i + \sum_{i,j=1}^{p} \partial_i\partial_j f(a)h_ih_j + o(\|H\|^2) \tag{9}$$

La matrice-colonne des entrées $\partial_i f$ est la matrice Jacobienne. La matrice $p \times p$ de dérivées secondes

$$Hess_f(A) := [\alpha_{ij}] = [\partial_i\partial_j f(A)]$$

s'appelle la <u>matrice Hessienne</u> de f en A. Par le théorème de Schwarz cette matrice est symétrique si f est de classe C^2. La forme quadratique $\alpha(u) = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij}u_iu_j$ s'appelle la <u>forme hessienne</u> de f en A.

Remarque 68. L'idée de la formule de Taylor c'est de trouver localement une approximation de la fonction par un polynôme.

En particulier, pour $p = 2$, $A(a, b)$, $H(h, k)$, $(A+H)(a+h, b+k)$ on a les formules de Taylor suivantes :

– $n = 0$

$$f(A+H) - f(A) = o((\sqrt{h^2+k^2})^0) \Leftrightarrow \lim_{H\to 0} \frac{f(A+H) - f(A)}{1} = 0$$

- continuité

– $n = 1$

$$f(A+H) - f(A) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

- différentiabilité.

– $n = 2$

$$
(10) \qquad \begin{aligned} f(A+H) \; - f(A) \; &= h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ &+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) + o(h^2+k^2) \end{aligned}
$$

4.4. **Vecteur normal et plan tangent à un graphe d'une fonction de 2 variables.**

A. Surfaces et coordonnées curvilignes (Ici je suis le cours [3]).

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 | (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}$$

est le graphe de la fonction f sur D (définition 21). Il est évident que l'application :

$$F : D \to S,\ F(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

est une bijection. Puisque les points de S sont donnés par des pairs de nombres (x, y), l'ensemble S est appellé une surface de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$.

Si on a un chemin $\Gamma : I \to D$, alors automatiquement on a un chemin $F \circ \Gamma : I \to S$ sur la surface S. Si

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

une representation parametrique de Γ alors le chemin $F \circ \Gamma$ sur S est donné par les trois fonctions :

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= f(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Soit $(x_0, y_0) \in D$. On peut trouver un chemin :

$$x = x_0 + t,\ y = y_0,\ z = f(x_0 + t, y_0)$$

sur la surface S pour lequel la coordonnée $y = y_0$ ne change pas et un autre chemin :

$$x = x_0,\ y = y_0 + t,\ z = f(x_0, y_0 + t)$$

pour lequel la coordonnée $x = x_0$ ne change pas. Ces chemins partant des points différents de la surface S tracent des lignes de coordonnées sur S. Pour cette raison on appelle (x, y) les coordonnées curvilignes sur S.

B. Plan tangent

Si la fonction $z = f(x, y)$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in D$, alors, quand $(x, y) \to (x_0, y_0)$ on a :

$$(11) \qquad f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

où A et B sont des constantes égales aux dérivées partielles au point (x_0, y_0).

Considerons un plan dans $\mathbb{R}^3$ donné par une équation

$$(12) \qquad z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

où $z_0 = f(x_0, y_0)$. On voit que le graphe (11) de la fonction f autour du point (x_0, y_0) est éloigné du plan (12) par une valeur négligeable par rapport à $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Définition 69. Le plan

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0) \tag{13}$$

avec $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ est appellé le plan tangent au graphe de la fonction $z = f(x,y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

C.Vecteur normale

Soit $(x,y,z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ et $F(x,y,z) = 0$ l'équation implicite d'une surface S (tout à l'heure on avait une surface : $z = f(x,y)$ pour laquelle $F(x,y,z) = f(x,y) - z$.) Soit

$$t \in I \subset \mathbb{R},\ \gamma : t \mapsto \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

l'équation parametrique d'une courbe de la surface passant par le point $P_0(x_0,y_0,z_0)$, c.à.d. il existe

$$t_0 \in I, \text{ tel que } (x_0,y_0,z_0) = (f(t_0), g(t_0), h(t_0)) \text{ et } (x,y,z) = (f(t), g(t), h(t))$$

satisfont l'équation $F(x,y,z) = 0$ pour tout $t \in I$. Soit $\alpha(t) = F(f(t), g(t), h(t))$ une fonction composée de $I \to \mathbb{R}$, qui est identiquement 0 sur I. Donc au point $t = t_0$ on a

$$0 = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

De l'équation (14) suit que le vecteur $^{\dagger}\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t=t_0}$ est orthogonal au vecteur $^{\dagger}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right) \equiv \overrightarrow{\mathrm{grad}}F(P_0)$. Le vecteur $^{\dagger}\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t=t_0}$ est un vecteur quelconque dans l'espace tangent à S au point P_0. Donc le vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(P_0) = {}^{\dagger}\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)(P_0)$$

est orthogonale à tout vecteur tangent à la surface S passant par P_0. Cela signifie exactement que le vecteur-gradient est normale à la surface S.

L'équation du plan tangent à la surface donnée par l'équation $F(x,y,z) = 0$ est facile à établir : c'est le plan passant par P_0 tel que tout vecteur de ce plan est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(P_0)$. L'equation du point $M(x,y,z)$ du plan est alors, que le vecteur $\overrightarrow{P_0M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}F(P_0) = 0$. Ce produit scalaire donne l'équaton du plan tangent :

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)(P_0) = 0.$$

De façon plus explicite :

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(P_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(P_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) = 0.$$

On peut comparer cette formule à la formule (13).

5. Extrema

5.1. **Extrema locaux et globaux. Définition.** On étudie le comportement d'une fonction de plusieures variables à valeurs réelles. Une telle fonction peut avoir des valeurs extremales : des minima (les plus petites) ou des maxima (les plus grandes) sur tout le domaine de définition ou bien, sur une certaine partie. On les appelle des extrema.

Définition 70.

1.Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) global au point $A \in D$ si pour tout $X \in D$ on a $f(X) \leq f(A)$ (resp. $f(X) \geq f(A)$). Le maximum (resp. minimum) est appelé strict si $f(X) < f(A)$ (resp. $f(X) > f(A)$).

2. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local au point $A \in D$ si on peut trouver un nombre $r > 0$ tel que $X \in D$ et $\|X - A\| < r$ entraine $f(X) \leq f(A)$ (resp. $f(X) \geq f(A)$).

Les extrema globaux sont appelés aussi extrema absolues.

5.2. **Théorème des extrema sur un compact.**

Théorème 71. *Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un compact $K \subset \mathbb{R}^p$. Alors f admet un maximum et un minimum sur K.*

En dimension $p = 1$ la fonction, sur un intervalle, a des points extremaux. Soit ils sont a l'interieur de l'intervalle, auquel cas ils verifissent $f'(x) = 0$, soit ils sont au bord de l'intervalle (sur le bord, la condition $f'(x) = 0$ n'est pas forcement satisfaite). Donc pour trouver les extrema on cherche d'abord des points critiques (où la derivée s'annule), puis on compare la valeur des points critiques avec les valeurs sur le bord de l'intervalle. Les valeurs max et min se trouvent parmis ces valeurs-là.

Définition 72. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. On dit que $A \in D$ est un point critique de f si toutes les dérivées partielles s'annulent en A (équivalent à dire que le gradient de f est nul en A, équivalent à dire aussi que la différentielle de f est nul en A).

Théorème 73. *Condition necessaire d'extremum local. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ admettant un maximum ou un minimum local au point $A \in U$. Alors A est un point critique de f.*

Preuve. Reprenons la formule de Taylor (10) à l'ordre 2 en dimension 2. La preuve se généralise sans problème aux dimensions superieures.

$$\begin{aligned}
f(a+h, b+k) - f(a,b) &= h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\
&+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) + o(\|(h,k)\|^2)
\end{aligned}$$

Si on a un max local en A, alors $f(a+h, b+k) - f(a,b) \leq 0$ pour tout (h,k) suffisament petit. La valeur de $h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, si elle n'est pas 0, est grande par rapport aux terms suivants. Donc cette valeur, si n'est pas égale à 0, doit être negative. Pourtant pour h, k positifs il faut que les valeurs $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \leq 0,\ i = 1, 2$ et pour

h, k négatifs il faut que les valeurs $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0,\ i = 1, 2$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0,\ i = 1, 2$. Refaire le même raisonement pour un min local.

5.3. **Extrema de fonctions de 2 variables - critère par le déterminant de matrice Hessienne.** Soit $f:\ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$. Quand $p = 1$, pour savoir si un point critique X_0 est un maximum local ou un minimum local, on étudie la dérivée seconde (quand elle existe) :

- si $f''(X_0) > 0$, alors $f(X_0)$ est un minimum local,
- si $f''(X_0) < 0$, alors $f(X_0)$ est un maximum local,
- si $f''(X_0) = 0$, on ne sait pas (ça peut être un point d'inflexion, un maximum ou un minimum).

Ici, on étudie la Hessienne :

Propriété :

Soit $f:\ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$ un point critique de f. On suppose que $Hf(X_0)$ existe. Alors

- si toutes les valeurs propres de $Hf(X_0)$ sont strictement positive, $f(X_0)$ est un minimum local,
- si toutes les valeurs propres de $Hf(X_0)$ sont strictement négatives, $f(X_0)$ est un maximum local,
- sinon, on ne sait pas.

Pour $p = 2$ on fait le calcul de la formule de Taylor. Au point critique $X_0(a, b)$ on a

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right) + o(\|(h, k)\|^2)$$

Donc le signe de la forme quadratique (la forme hessienne)

$$\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right)$$

va déterminer si on a le maximum, le minimum ou ni l'un ni l'autre. Pour avoir le maximum (minimum) il faut que la forme soit negative (positive) pour tout (h, k) au voisinage de $(0, 0)$. Si la forme hessienne n'est pas de signe définie on a des couples (h, k) pour lesquelles la valeur de $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ est positive et d'autres pour lesquelles cette valeur est négative. Donc on a des directions (h, k) dans lesquelles la fonction a un maximum au point (a, b) et d'autres où la fonction a un minimum au même point. Ce type de point critique s'appelle un point selle (comme une selle de cheval) ou bien point-col (comme dans les montagnes).

On étudie alors la forme hessienne. On choisit des notations standardes :

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b),\ S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b),\ T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

On suppose que $R \neq 0$ et on reécrit la forme hessienne :

$$\begin{aligned} Rh^2 + 2Shk + Tk^2 &= R\left(h^2 + 2\frac{S}{R}hk + \frac{T}{R}k^2\right) \\ &= R\left(h^2 + 2\frac{S}{R}hk + \left(\frac{S}{R}\right)^2 k^2 - \left(\frac{S}{R}\right)^2 k^2 + \frac{T}{R}k^2\right) \\ &= R\left(\left(h + \frac{S}{R}k\right)^2 + \left(\frac{T}{R} - \frac{S}{R}^2\right)k^2\right) \end{aligned}$$

Puisque le premier terme $\left(h + \frac{S}{R}k\right)^2 \geq 0$, c'est le deuxième terme qui définit si la forme est de signe définie. Alors,

- Si $(\frac{T}{R} - \frac{S^2}{R}) > 0$ ($\Leftrightarrow RT - S^2 > 0$) on a un maximum si $R < 0$ et minimum si $R > 0$.
- Si $RT - S^2 < 0$ on a un point selle.

Remarque 74. Si $RT - S^2 > 0$ la condition $R > 0$ ($R < 0$) est équivalent à la condition $R+T > 0$ ($R+T < 0$) i.e. la condition sur la trace de la matrice hessienne.

Recherche des extrema :

- Déterminer des points où f n'est pas de classe C^1 et regarder les valeurs de f en ces points. Par exemple, la fonction $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ admet un maximum à l'origine mais on ne le trouve pas parmis les points critiques.
- Rechercher les points critiques.
- Etudier les points critiques.

Exemple 75. Extrema locaux et globaux de $f(x, y) = 2x^2y+2x^2 = y^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = 4xy + 4x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y+1) & = 0 \\ x^2 + y & = 0 \end{cases}$$

On trouve alors trois points critiques $(0, 0), (-1, -1)$ et $(1, -1)$.

pt critique	$(0,0)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$
$R = 4y + 4$	4	0	0
$S = 4x$	0	-4	4
$T = 2$	2	2	2
$RT - S^2$	8	-16	-16
Signe de R	> 0		
Nature de pt critique :	min	pt selle	pt selle

Les extrema globaux : on voit que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x, 0) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^2 = +\infty$$

donc pas de maximum global. Pas de minimum global non-plus car

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x, -2) = \lim_{x\to\pm\infty} -2x^2 + 4 = -\infty$$

Ici on a utilisé un critère par le signe du determinant (et de la trace) de la matrice hessienne pour déterminer la nature de point critique. Si le déterminant est 0 on doit regarder la formule de Taylor à l'ordre superieur (à l'ordre 2).

Exemple 76. On cherche des extrema locaux de $g(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

On trouve 3 points critiques $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ pour lesquels on ne peut pas utiliser le critère car $RT - S^2 = 0$ mais $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^4 - 1$ donc en $(\pm 1, 0)$ il y a un minimum local. En $(0, 0)$ on a $g(0, 0) = 0$ et au voisinage de $(0, 0)$ on a des valeurs positives et negatives $g(0,y) = y^4 > 0$ et $g(y,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ pour x suffisament petit. Donc $(0,0)$ n'est pas un max ni un min, c'est un point-selle.

5.4. **Extrema liés.** Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $g(x,y) = 0$ l'équation de la courbe $C \subset K$. Si C est le bord de K, on a une notation $C = \partial K$. On regard la restriction de f sur la courbe C. Les variables doivent vérifier la condition $g(x,y) = 0$ appelée la contrainte. On cherche les extrema de la fonction f sur C. On dit qu'on étudie les extrema de f assujetie à la contrainte. Ce sont des extrema liés.

Exemple 77. Voici un exemple de problème de recherche d'extrema liés : parmis des rectangles avec la somme de cotés $2p$ (où p est un nombre positif donné), trouver un a l'aire maximale. Soient x, y les cotés du rectangle. Alors on a $\sigma(x,y) = xy$ l'aire, qui doit être maximal tandis que (x,y) sont sousmis à la condition $x + y = p$. Ici, il est facile d'exprimer y par x et trouver un maximum d'une fonction d'une variable ainsi obtenue.

Il est rare que l'on puisse exprimer y directement comme une fonction de x en utilisant la contrainte.

Regardons un exemple de la page 362 [2] : la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ et la contrainte, la courbe C, est définie par l'équation $g(x,y) = 0$. Il s'agit de trouver un minimum lié par cette relation $g(x,y) = 0$. C'est un minimum de f sur la courbe C. Géometriquement on résoud le problème en traçant des lignes de niveau de f. Ce sont des cercles concentriques du centre $(0,0)$. Si on trace des cercles de rayons croissants, jusqu'à rencontrer la courbe C, la valeur critique est sur le cercle qui touche la courbe. Faites un dessin - c'est instructif (dessiner une courbe quelconque et traces les cercles).

La méthode générale utilise la considération suivante. Soit $P(a,b)$ un point de l'extremum de f restreint à la courbe C. Le vecteur tangent à la courbe au point P doit être aussi tangent à la ligne de niveau $f(a,b)$ (on le voit clairement dans le deuxième exemple considéré tout à l'heure). Mais les lignes de niveau sont normales au gradient de f, de l'autre coté le vecteur tangent à C est normale au gradient de g. Donc ces deux gradients sont proportionnels. On appelle le coefficient de proportinalité le multiplicateur de Lagrange.

Proposition 78. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Soit (a,b) un point de U tel que :

(1) f soumise à la contrainte $g(x,y) = 0$ admet un extremum au point(a,b).

(2) $\overrightarrow{\text{grad}} g(a,b) \neq 0$

Alors il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} g(x,y)$.

Les nombre a, b, λ sont des solutions du système d'équations suivant : les dérivées partielles de $f(x,y) - \lambda g(x,y)$ par rapport à x, y, λ doivent être égale à 0.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) & = 0 \\ g(a,b) & = 0 \end{cases}$$

Exemple 79. Trouver le point le de la courbe $y = x^2$ qui est le plus près du point $(0,h)$. Alors, ici $g(x,y) = y - x^2$, et $f(x,y) = x^2 + (y-h)^2$ - le carré de la distance.

Les gradients nous donnent

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x & = 0 \\ 2(y-h) - \lambda & = 0 \\ y - x^2 & = 0 \end{cases}$$

Les solutions : soit $x = 0$, et alors $y = 0$ aussi, ou bien $\lambda = -1$ et $y = h - 1/2$, $x = \pm\sqrt{h-1/2}$. Alors pour $h \geq 0$, les points $(\pm\sqrt{h-1/2}, h-1/2)$ sont à la distance minimale de $(0,h)$. Si $h < 1/2$ on a $(0,0)$ comme point le plus proche.

Théorème 80. *Soit f une fonction C^2 sur un compact $K \subset \mathbb{R}^2$, alors f atteint un minimum et un maximum globaux sur K. Ces points d'extrema sont*
- *soit les points interieurs de K, auquel cas ce sont des points critiques ($\overrightarrow{grad}f = 0$ dans ces points)*
- *soit ils sont de bord ∂K de K auquel cas ils sont donnés par le calcul avec les multiplicateurs de Lagrange.*

Exemple 81. trouver les extrema globaux de $f(x,y) = y + y^2 - x^2 + 3$ sur $B(0,1)$ disque de centre $(0,0)$ de rayon 1. On cherche les points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = -2x & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = 1 + 2y & = 0 \end{cases}$$

On trouve un seul point critique $(0,-1/2)$. Ce point se trouve dans le disque et sa valeur est $f(0,-1/2) = 11/4$

La matrice hessienne donne :

$$\text{dét}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow (0,-1/2) \text{ point selle.}$$

Il faut alors chercher les extrema globaux sur le bord $x^2 + y^2 - 1 = 0$. On a :

$$\begin{cases} -2x - 2\lambda x & = 0 \\ 1 + 2y - 2\lambda y & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 0 \end{cases}$$

On trouve les points $(0,\pm 1)$ et $(\pm\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4})$. Les valeurs : $f(0,1) = 5$, $f(0,-1) = 3$, $f(\pm\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4}) = \frac{15}{8}$. On compare ses valeurs et conclut que le max se trouve au point $(0,1)$ et le min aux points $(\pm\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4})$

5.5. **Extrema de fonction de n variables.** En dimension n on procède de la même façon que en dimension 2. En utilisant la formule de Taylor en dimension n au voisinage d'un extremum on voit que la condition necessaire est que le gradient s'annule au point d'extrema local. La condition suffisante pour avoir un miminum (maximum) est que la forme hessienne soit positivement (négativement) définie.

Pour les extrema liés on a le théorème suivant ([2]) :

Théorème 82. *Soient $f, g_1, \cdots g_n$ des fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, et E ensemble défini par les équations :*

$$g_1(X) = 0, \cdots, g_n(X) = 0, \text{ avec } X \in U.$$

Si la restriction de f à E admet un extremum local en $A \in E$, et si les différentielles $Dg_1(A), \cdots, Dg_n(A)$ sont linéarement indépendentes sur $\mathbb{R}^p$, alors necessairement les formes linéaires $Df(A), Dg_1(A), \cdots, Dg_n(A)$ sont liées. En d'autres termes, il existe des coefficients réels $\lambda_1, \cdots \lambda_n$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que

$$Df(A) = \lambda_1 Dg_1(A) + \cdots \lambda_n Dg_n(A)$$

6. Chapitre VI. Champs de vecteurs

6.1. **Definitions.**

Définition 83. Un champ de vecteurs sur $D \subset \mathbb{R}^p$ est une application qui à tout point M de D associe un vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ de $\mathbb{R}^p$. Soit $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ est un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, alors un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ est donné par trois fonctions P, Q et R sur D à valeurs réelles :

$$\overrightarrow{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k}$$

On dit que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est de classe C^k sur D si P, Q, R songt de classe C^k

Les fonctions à valeurs réelles on appelle parfois les champs scalaires, tandis que les champs vectoriels sont des fonctions à valeurs vectorielles. Quand on dessine un champs de vecteur on a des vecteurs assocés à tout poit du domain de définition. Pour dessiner un champs on prend quelques points sur le plan $\mathbb{R}^2$ et en chaque point choisi on calcul la valeur du champ et on fait un dessin de vecteur ainsi obtenu commenceant dans le point choisi. Voici quelques exemples de champs facile à dessiner :

Exemple 84.

Champ uniforme - champ constant, par exemple : $\lambda \overrightarrow{i}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Champ convergent : $-x\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j}$.
Champ tournant : $-y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$.

6.2. **Gradient. Opérateur Nabla.**

Le gradient est un exemple d'un champ de vecteurs : le gradient d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^n$ associe à chaque point X de D le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(X)$. Dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées $\{x, y, z\}$ on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(X), \frac{\partial f}{\partial y}(X), \frac{\partial f}{\partial z}(X)\right).$$

En $\mathbb{R}^3$ on regarde un opérateur ∇ à coordonnées $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Cet opérateur

$$\nabla = \overrightarrow{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{15}$$

agissant sur les fonction est égale au gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f$.

Linéarité du gradient : soient f_1, f_2 des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ et λ, μ nombres réels alors $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda\, \overrightarrow{\text{grad}} f_1 + \mu\, \overrightarrow{\text{grad}} f_2$

On peut poser une question si tous les champs de vecteurs sont des gradients des fonctions et voir rapidement que c'est une restriction assez forte.

Définition 85. Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$. S'il existe $f : D \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ on dit que le champ $\overrightarrow{V}$ dérive du potentiel scalaire f sur D et $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient aussi appelé un champ potentiel.

Remarque 86.

1. La condition $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ dans certains livres physiques est donnée avec un signe : $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\text{grad}} f$ pour des raisons de convention dans certaines équations.
2. La fonction f si existe est unique à une constante près.

6.3. **Divergence et Rotationnel.**

A l'aide de l'opérateur $\overrightarrow{\bigtriangledown}$ on peut définir des opérations sur les champs - la divergence et le rotationnel.

Soit $V : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1. Le produit scalaire de $\overrightarrow{\bigtriangledown}$ avec un champ V donne une fonction, qui s'appelle la divergence dde V.

Le produit vectoriel de $\overrightarrow{\bigtriangledown}$ avec un champ V donne un nouveau champ, qui s'appelle le rotationnel de V.

La divergence agit sur les champs de vecteur et donne des fonctions.

Définition 87. Soit $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$ un champs de vecteurs, $\overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$, où P, Q, R sont des fonctions $D \to \mathbb{R}$. La divergence de V. La divergence de V est

$$\text{div}\overrightarrow{V} = \nabla \cdot \overrightarrow{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{16}$$

On remarque que la divergence est linéaire :

$$\text{div}(\lambda\overrightarrow{V} + \mu\overrightarrow{W}) = \lambda\text{div}\overrightarrow{V} + \mu\text{div}\overrightarrow{W}$$

Le rotationnel agit sur les champs de vecteur et donne des champs de vecteurs.

Définition 88. Soit $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$ un champs de vecteurs, $\overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$, où P, Q, R sont des fonctions $D \to \mathbb{R}$. Le rotationnel de V est

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V} &= \nabla \wedge \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}. \end{aligned} \tag{17}$$

On remarque que le rotationnel est linéaire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\lambda\overrightarrow{V} + \mu\overrightarrow{W}) = \lambda\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V} + \mu\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{W}$$

Remarque 89. <u>Propriétés de l'opérateur ∇</u> :

Soit $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1, et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors, on a

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}) = \nabla \cdot (\nabla \wedge \overrightarrow{V}) \equiv 0,$$

formelement on peut le voir comme un produit mixte, qui est identiquement 0 si les vecteurs ne sont pas independents, ici se sont pas des vecteurs mais des opérateurs vectoriels mais le produit mixte de ∇, ∇ et $\overrightarrow{V}$ est idéntiquement 0. On a aussi

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla \wedge (\nabla f) \equiv 0. \tag{18}$$

6.4. **Théorème de Poincaré.** .

Proposition 90. Soit $\overrightarrow{V}\ : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3, \overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$, un champ de vecteurs, p, Q, R des fonctions de D vers $\mathbb{R}$. Une condition necessaire pour que le champ $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire sur D est que en tout point M de D, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = 0$.

Preuve. De la relation 18 suit que pour qu'il existe $f : D \to \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ on a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} = 0$. Cela se traduise en trois conditions sur les fonctions P, Q et R :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

La condition suffisante pour un champ d'être un champs de gradient concerne le domaine de définition de champ.

Théorème 91. *(Poincaré) Soit $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 tel que $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = 0$ alors il existe une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad} f$.*

On ne donne pas ici de démonstration de ce théorème mais on remarque que le champ de vecteurs en question est de classe C^1 sur R^3. C'est le domaine de définition du champ qui joue un rôle important ici.

Voici une définition pertinante :

Définition 92. Un domain $D \subset \mathbb{R}^n$ est simplement connexe si D est connexe par arc (Définition **??**) et toute courbe fermée de D peut être ramenée à un point par une déformation continue.

Exemple 93. Un exemple d'un domaine non-simplement connexe : un domaine de $\mathbb{R}^2$ - un anneau, on peut définir pour $r^2 < R^2,\ D = \{(x, y) |\ r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. On peut voir ce domain comme un disque de rayon R trou´ : le petit disque autour du centre est enlevé du grand disque. Il n'est pas simplement connexe. En effet, si on considère une courbe de D qui contourne $(0, 0)$ il n'y a pas de façon de la ammener à un point, sans la faire sauter par ce disque absent.

Le théorème de Poincaré est alors formulé dans une façon plus générale :

Théorème 94. *(Poincaré générale) soit $V : D \subset \mathbb{R}^3$ un champ de vecteur de classe C^1 ET $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = 0$. Alors si D est simplement connexe, il existe une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad} f$.*

6.5. **Calcul du potentiel.** Si V est un champ potentiel, alors on peut trouver le potentiel à une constante près. On va faire un exemple de calcul ici.

7. Chapitre VII. Intégrales multiples

7.1. **Définition. Intégrabilité des fonctions continues.**

7.1.1. *Intégrale double.* Soit f une fonction continue sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$. On partage ce rectangle en $n{\cdot}m$ petits rectangles $R_{ij}, i \in [1, m],\ j \in [1, n]$. R_{ij} a les cotés m et n et le vertex superieur droite dans le point $(a + i \cdot \dfrac{b-a}{m}, c + j \cdot \dfrac{d-c}{n})$. La *somme de Riemann,* S_{mn}, est la somme des volumes de parrallelepipèdes avec des bases dans R_{ij} et la hauteur donné par la valeur de f en point (x_i, y_j) de coordonnées $(a + i \cdot \dfrac{b-a}{m}, c + j \cdot \dfrac{d-c}{n})$:

$$S_{mn} = \frac{b-a}{m}\,\frac{d-c}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j).$$

Définition 95. L'intégrale double de f sur R est la limite des sommes de Riemann :

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{m\to\infty, n\to\infty} S_{mn}.$$

Propriétés :

(1) **Linearité.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R, alors

$$\iint_R (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lambda \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mu \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(2) **Croissance.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R, telles que $f(x, y) \leq g(x, y),\ \forall (x, y0 \in R$, alors

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_R g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

On en déduit que

$$\left|\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leq \iint_R |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(3) **Théorème de Fubini pour un rectangle.** Intégrale double d'une fonction réelle continue, f, sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ est égale à deux intégrales simples successives :

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b (f(x,y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d (f(x,y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$$

En particulier, si $f(x, y) = g(x)h(y)$

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{``} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y$$

7.2. **Aire d'une partie quarrable. Théorème de Fubini.** Pour définir l'intégrale double sur une partie de R^2 qui n'est pas un rectangle on introduit une notion d'une partie quarrable du plan.

Soit D une partie bornée de R^2 et $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle qui la contient.

On appelle une *subdivison* σ de R, $m{\cdot}n$ rectangles $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], x_i, y_j \in R$ venant du partage de $[a, b]$ en m segments et de $[c, d]$ en n segments :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b; c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

pour m et n quelconques. Le rectangle R_{ij}, est de l'aire $\mu(R_{ij}) = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j$.

A toutes subdivison σ de R on associe deux quantité qu'oin appelle les sommes de Darbout :

$$s(\sigma) = \sum_{Rij \subset D} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j) \quad \text{et } S(\sigma) = \sum_{Rij \bigcap D \neq \emptyset} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j).$$

Définition 96. On dit que $D \subset R$ est quarrable si la borne supérieure des sommes $s(\sigma)$ est égale à la borne inférieure des sommes $S(\sigma)$. Leur valeur commune donne l'aire de D.

Remarque 97. *D* est une partie quarrable du plan donc la frontière de D est quarrable de l'aire nulle. Ainsi un disque un polygñe sont des exemples des parties quarrables, que l'on prend ou non leur frontière.

Définition 98. Fonction f bornée sur une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ est intégrable si et seulement si la somme (aussi appele une somme de Riemann)

$$\sum_{R_{ij} \bigcap D \neq \emptyset} f(u_i, v_j) Aire R_{ij}$$

tend vers une limite finie indépendente de choix de (u_i, v_j) quand tous $x_{i+1} - x_i$ et $y_{j+1} - y_j$ tendent vers 0. Cette limite est appelée l'intégrale de f sur D :

$$\iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Théorème 99. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue <u>bornée</u> sur une partie quarrable du plan. Alors f est intégrable sur D.*

Remarque 100. La propriété d'être bornée est importante. C'est pareil pour les fonctions même d'une variable comme le montre l'exemple de la fonction $1/x$ qui n'est pas bornée sur l'intervale $]0, 1]$: elle n'est pas intégrable !

Théorème 101. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur une partie quarrable du plan. Si l'ensemble de points de discontinuitéde f est d'aire nulle alors f est intégrable sur D*

D'ailleurs, aire d'une partie quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$ peutêtre vu comme une intégrale d'une fonction constante égale à 1 sur D :

$$Aire(D) = \iint_D \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Exercice : expliquer pourquoi par raisonnement géometrique - presenter le graphe de la fonction 1 sur D et voir quel volume represente l'intégrale double.

Comment en pratique on calcule les intégrales double sur une partie quarrable du plan ?

- Soit ϕ et ψ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

(Faire un dessin). Soit f une fonction réelle intégrable sur D Alors, on a

$$\iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int \phi(x)^{\psi}(x) f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Exemple. On calcule

$$I = \iint_D (x + y)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

où D est un triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(2,0)$. Alors ici

$$\phi(x) = 0 \text{ et } \psi(x) = -\frac{x}{2} + 1,\ x \in [0,2].$$

Donc

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{-x/2+1} (x+y)^2 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left.(x+y)^3\right|_{y=0}^{y=-x/2+1} \mathrm{d}x = \frac{7}{6}$$

Les rîes de x et y sont les même donc on peut cacluler le même intégrale comme suit :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2y} (x+y)^2 \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

et obtenir le même resultat.

7.3. **Changement de variables dans une intégrale double. Matrice jacobienne.** Soit f une fonction continue sur un compact quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $\Delta \to D$ une bijection :

$$(u,v) \mapsto (x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)),$$

ϕ et ψ étant de classe C^1. Alors,

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(\phi(u,v), \psi(u,v) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

où $\left| \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \right|$ est une valeur absolut de déterminant de la matrice des dérivés premières de l'application $\Delta \to D$, la Jacobienne (définition 51).

Exemple 102. Changement en coordonnées polaires Soit $[0,\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ une bijection entre les coordonées polaires et decartiennes données par

$$(r,t) \mapsto (x = r\cos t, y = r\sin t).$$

$$\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r.$$

Calculer $I = \iint_D y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ sur D, disque de centre $(0,0)$ de rayon R. Le calcul direct est assez long :

$$\begin{aligned} I = &\ \textstyle\int_{-R}^{R} \left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} 2 \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\ = &\ \textstyle\int_{-R}^{R} 2 \left[y^3/3\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}x = \frac{4}{3} \int_0^R (\sqrt{R^2-x^2})^3 \,\mathrm{d}x \\ = &\ \textstyle\frac{4}{3} \int_{\pi/2}^{0} R^3 \sin^3\theta(-R\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3} R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

où on utilise le changement de variables $x = R\cos\theta,\ 0 \le \theta\pi/2,\ \mathrm{d}x = -R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,\ \mathbb{R}^2 - x^2 = R^2(1-\cos^2\theta) = R^2\sin^2\theta$. On utilise aussi la linéarisation de $\sin^4\theta$:

$$\sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} \right) = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

Ce calcul a l'aire assez long et fort utile, mais à l'aide de changement de variables sous l'intégrale double on arrive au resultat plus rapidement : Les coordonnées polaires transforme le rectangle en disque. Ici on a un disque et donc :

$$\Delta = \{(r,t) \in \mathbb{R}^2 \,|0 \le r \le R \text{ et } 0 \le t \le 2\pi\} \to D = \{(x,y) \in R^2 \left|x^2 + y^2 \le R^2\right.\}$$

Donc l'intégrale

$$I = \iint_\Delta r^2 \sin^2 tr \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \int_0^R r^3 \,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{R^4}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi R^4}{4}$$

7.4. **Volume. Intégrales triples. Coordonnées cylindriques, sphériques...**

8. Chapitre VIII. Courbes et Intégrales curvilignes

8.1. **Courbes de $\mathbb{R}^2$. Théorème des fonctions implicites pour les courbes de $\mathbb{R}^2$.**

Une courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ peut être définie de façons différentes.

– a) forme explicite $y = f(x)$ où $f : I \to \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R}$,

$$\Gamma = \{(x, y)|\ x \in I \subset \mathbb{R}, y = f(x)\}.$$

Si f dérivable en $x_0 \in I$ alors Γ possède une tangente au point $m_0 = (x_0, y_0)$, où $y_0 = f(x_0)$. L'équation de cette tangent est

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

– b) forme paramétrique

$$\gamma(t) = \begin{cases} x &= g(t) \\ y &= h(t) \end{cases}$$

où $g, h : I \to \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R}$,

$$\Gamma = \{(x, y)|x = g(t), y = h(t)\ t \in I\}.$$

Une fonction $\gamma(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ sur une int'ervalle I défini une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$. $(f(t), g(t))$ est une representation paramétrique de la courbe. La même courbe peut avoir des representations différentes, par exemple, les paramétrizations

$$\gamma(t) = \begin{cases} x &= t \\ y &= 2t \end{cases},\ t \in [0, 1]; \quad \gamma(s) = \begin{cases} x &= s/2 \\ y &= s \end{cases},\ s \in [0, 1]$$

d'efinissent le même segment de la droite $y = 2x$. Pour une courbe

$$\gamma(t) = \begin{cases} x &= g(t) \\ y &= h(t) \end{cases}$$

avec g, h dérivable en $t_0 \in D$ avec $(g'(t_0), h'(t_0)) = (0, 0)$. La dérivée

$$\gamma'(t) = \begin{cases} g'(t) \\ h'(t) \end{cases}$$

définie un vecteur tangent à la courbe Γ en point $(x_0, y_0) = (g(t_0), h(t_0))$. Pour écrie l'équation de la tangente à Γ au point (x_0, y_0), on trouve l'équation de la droite passant par (x_0, y_0) et parralelle à $(g'(t_0), h'(t_0))$. On l'écrit dans la forme de déterminant d'une matrice

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & g'(t_0) \\ y - y_0 & h'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Si $(g'(t_0), h'(t_0)) = (0, 0)$ la tangente peux exister également, sa pente est $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{h'(t_0)}{g'(t_0)}$ lorsque cette limite existe.

– c) forme implicite : par une équation cartesienne

$$\Gamma = \{(x,y) \in D | f(x,y) = 0\} \text{ où } f \ : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2.$$

Dans ce cas sous certaines conditions c'est possible de se ramener à la forme explicite. On cherche à exprimer y en fonction de x par $y = \phi(x)$ localement, i.e. au voisinage d'un point de la courbe (x_0, y_0).

Théorème 103. *(Des fonctions implicites pour les courbes.) Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ un efonction de classe C^1 sur D. Soit $(x,y) \in D$ avec $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) =\neq 0$. Alors il existe $I \subset \mathbb{R}$ une intervalle ouvert de centre x_0 et $J \subset \mathbb{R}$, une intervalle ouvert de centre y_0, telles que*

(1) *$\forall x \in I,\ f(x,y) = 0$ possède une unique solution $y \in J$ noté $y = \phi(x)$ (en particulier $y_0 = \phi(x_0)$.*

(2) *En particulier, $\phi : I \to J$ est dérivable sur I avec*

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

Example : $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Pour le point $(x_0, y_0) = (0,1)$ de la courbe $f(x,y) = 0$ on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2$ - le thèoréme s'applique, d'où l'existence d'une fonction $\phi : I \to J$. On peut prendre les intervales $I =]-1, 1[$ et $J =]0, 2[$. Dans ce cas simple on peut expliciter $\phi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Pour la dérivée on vériufie que

$$\phi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}.$$

L'interêt du théorème reside dans les cas où on ne peut pas expliciter ϕ, mais neanmoins on peut construire le graphe en utilisant les valeurs des tangentes.

En utilisant la formule de Taylor, on a

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2})$$

La ligne de niveau 0 de f définie une courbe implicitement. (x_0, y_0) appartient a cette courbe si $f(x_0, y_0) = 0$. la différentielle dans ce point décrit bien le comportement de la courbe :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = 0. \tag{19}$$

C'est une équation de la droite tangente. Si on peut resoudre cette équation linéaire par rapport à y (i.e. $f\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$) alors la courbe $f(x,y) = 0$ est proche de la droite (19) dans un voisinage suffisament petit. On peut esperer qu'on peut resoudre $f(x,y) = 0$ comme une relation explicite entre y et x.

Remarque 104. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ le théorème des fonctions implicites appliqué en permutant le rôle de x et y donne une application $\psi : J \to I$ et au voisinage de (x_0, y_0) l'équation de la courbe est $x = \psi(y)$.

8.2. **Droite tangente, plan normal à une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$.** Une courbe paramétré dans l'espace, appelé aussi "courbe gauche", est donnée par une application vectorielle :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Vecteur directeur en point de la courbe $(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ est donné par la dérivée de γ :

$$\overrightarrow{\gamma'}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}.$$

La droite tangente passe par (x_0, y_0, z_0) est parallèle au vecteur $\gamma(t_0)$, i.e. pour chaque point (x, y, z) de cette droite le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$, passant du point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ au point $P = (x, y, z)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\gamma'}(t)$. En coordonnées cela donne l'équation de la droite :

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & = & kx'(t_0) \\ y - y_0 & = & ky'(t_0) \\ z - z_0 & = & kz'(t_0) \end{pmatrix}, \ k \in \mathbb{R}.$$

k ici est une coefficient de proportinallité de vecteurs $\overrightarrow{P_0P}$ et $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$. La variable k depende de la position du point P sur la droite et quand k parcours $\mathbb{R}$, point P parcours la droite tangente. Si toutes les coordonnées de $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$ sont non-nulles on peut reécrire l'equation de la droite sans k :

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \tag{20}$$

Le plan normale, orthogonale à la courbe au point de la courbe (x_0, y_0, z_0), ce que en pratique signifie orthogonale à la tangente en ce point est donné par la relation suivante :

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Ici on utilise le produit scalair de la tangente est du vecteur $\overrightarrow{P_0Q}$, passant du point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ au point $Q = (x, y, z)$ du plan. Le plan est normale quand le produit scalaire $\overrightarrow{\gamma'}(t_0) \cdot \overrightarrow{P_0Q} = 0$.

Exemple 105. Cherchons les équations de la tangente et du plan normale à la courbe donné par les relations paramétrique :

$$x = t, \ y = t^2, \ z = t^3$$

au point $(x - 0, y_0, z_0) = (1, 1, 1), \ t = 1$. On a $x' = 1, \ y' = 2t, \ z' = 3t^2$, donc au point $(1, 1, 1)$, le vecteur-directeur est égale à $(1, 2, 3)$. L'équation de la tangente est

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2} = \frac{z - z_0}{3}$$

et du plan normale

$$1 \cdot (x - x_0) + 2 \cdot (y - y_0) + 3 \cdot (z - z_0) = 0.$$

Dernière remarque ici à propos de la dimension. La droite est un objet de dimension 1, donc pour écrire une équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$ il faut deux relations linéaires independentes, car $1 = 3 - 2$. Quand on utilise une variable supplementaire k pour écrire une équation d'une droite, on a 4 variables et 3 relation linéaires : $4 - 3 = 1$.

Un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est donné par une seule équation linéaire, de point de vu de dimension - la dimension du plan est $2 = 3 - 1$.

8.3. Longueur d'une courbe. Abscisse curviligne.

8.4. Intégrale curviligne d'une fonction.

8.5. Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs.

8.6. Théorème de Poincaré et l'intégrale curviligne.

9. Chapitre IX. Formes différentielles et leur intégration

9.1. Définition.

9.2. Forme differentielle de degré un, changement de variable.

9.3. Formes fermées, formes exactes.

9.4. Théorème de Green-Riemann.

9.5. Applications (calcul d'aire etc).

9.6. Surfaces. Intégrale de surface.

9.7. Théorèmes de Stokes : $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$.

Références

[1] Niglio, Louis et Fredon, Daniel, *Fonctions de plusieurs variables : rappels de cours, questions de réflexion, exercices d'entraînement*, Dunod, c1998. BU provisoire sciences 515.07 NIG

[2] Rouviére, François *Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation* Cassini, 1999 ou 2003. BU provisoire sciences 510.79 ROU

[3] Zorich, Vladimir *Mathematical Analysis I* et *hMathematical Analysis II* Springer 2002, 2007 ou 2008