

Semaine 1.

***Exercice 1**

Dans $\mathbb{R}^p$ donner la définition d'une boule ouverte de centre a et de rayon r . Démontrer qu'une boule ouverte est un ouvert.

Exercice 2

Montrer en donnant un exemple que l'union d'une famille infinie de parties fermées de $\mathbb{R}^p$ n'est pas nécessairement fermée.

Exercice 3

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x + y| + |2x - y| \end{aligned}$$

Vérifier que N définit une norme. Tracer la boule unité autour de l'origine par rapport à cette norme.

Exercice 4

Trouver la meilleure constante C telle que $\|x\|_2 \leq C\|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 5

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x + y| + |x| \end{aligned}$$

Vérifier que N définit une norme. Tracer la boule unité autour de l'origine par rapport à cette norme.

***Exercice 6**

Dans $\mathbb{R}^p$ donner la définition d'une boule fermée de centre a et de rayon r . Démontrer qu'une boule fermée est un fermé.

Exercice 7

Montrer en donnant un exemple que l'intersection d'une famille infinie de parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$ n'est pas nécessairement ouverte.

***Exercice 8**

Donner la définition d'une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Donner la définition d'une partie bornée de $\mathbb{R}^p$.

Exercice 9

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \max(|x + 3y|, |x - y|) \end{aligned}$$

Vérifier que N définit une norme. Tracer la boule unité autour de l'origine par rapport à cette norme.

***Exercice 10**

Donner la définition d'un espace normé en explicitant les trois conditions qui définissent une norme.

***Exercice 11**

Montrer que l'intersection de deux parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$ est un ouvert.

Exercice 12

Qu'appelle-t-on "ouvert de $\mathbb{R}^n$ " ? Donner la définition. Dessiner les ensembles de définition des fonctions suivantes et préciser leurs natures (ouvert ou fermé ou ni l'un ni l'autre) :

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad g(x, y) = \ln \left(\ln \frac{1}{y-x} \right)$$

***Exercice 13**

Donner la définition d'un espace métrique en explicitant les trois conditions qui définissent une distance.

***Exercice 14**

Démontrer qu'un espace normé est un espace métrique.

Exercice 15

Donner un exemple d'un espace muni d'une distance tel que la distance n'est pas induite par une norme.

***Exercice 16**

1. Définir la notion d'ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que pour $A \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a l'équivalence suivante : A ouvert ssi $A+x$ ouvert.

***Exercice 17**

Montrer que l'union d'une famille arbitraire de parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$ est ouverte.

***Exercice 18**

Montrer que la notion d'ouvert dans $\mathbb{R}^n$ ne dépend pas de la norme choisie.

***Exercice 19**

1. Donner les définitions des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ et montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, montrer les inégalités

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

En déduire une démonstration de l'équivalence de ces normes.

Exercice 20

Déterminer si l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y, y^2 < x\}$ est ouvert, fermé. Trouver son adhérence, son intérieur et sa frontière.

Exercice 21

Rappeler la définition d'une norme de $\mathbb{R}^n$. Dire, parmi les applications suivantes, lesquelles sont des normes de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2| \\ g(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \\ h(x_1, x_2) &= \sqrt{|x_1 x_2|} \end{aligned}$$

Exercice 22

Déterminer l'intérieur, la frontière et l'adhérence des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

$$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \text{ et } y \leq 1 - x^2\}.$$

Exercice 23

Est-ce que un cercle est un ouvert dans $\mathbb{R}^2$? dans $\mathbb{R}^3$? Est-ce qu'un intervalle ouvert est un ouvert dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 24

Déterminer si l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1) < 0\}$ est ouvert, fermé. Trouver son adhérence, son intérieur et sa frontière.

Semaine 2.

*Exercice 25

Donner une définition de graphe d'une fonction, des fonctions partielles, des lignes de niveau. Présenter un exemple d'une fonction de deux variables pour laquelle calculer quelques lignes de niveau, des fonctions partielles en un point et dessiner un graphe.

***Exercice 26** Donner la définition d'un domaine connexe par arc et démontrer que $\mathbb{R}^n$ est connexe par arc.

*Exercice 27

1. Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, $D \subset \mathbb{R}^p$ et A un point adhérent à D . Donner une définition de la limite de f au point A .
2. Soient f et g deux fonctions continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et a un point de $\mathbb{R}^p$. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

*Exercice 28

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^p$. On suppose que les limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existent pour un certain $a \in \overline{D}$, notés respectivement L et M . Montrer que la limite $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ existe.

*Exercice 29

1. Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, $D \subset \mathbb{R}^p$ et A un point adhérent à D . Donner une définition de la limite de f au point A .
2. Soient f et g deux fonctions continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et a un point de $\mathbb{R}^p$. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

*Exercice 30

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. Soit $u_0 \in D$, f continue en u_0 . Soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^q$, $f(D) \subset E$, g continue en $f(u_0)$.

On a ainsi : $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q$.

Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue en } u_0 \\ g \text{ continue en } f(u_0) \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ est continue en } u_0.$$

Exercice 31

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right) & \text{si } x^2 + y^2 = 0 \\ 0 & \text{si } y = x = 0 \end{cases}$$

Calculer les limites partielles sur les droites $y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$, puis sur une parabole $y = x^2$.

Est-ce que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 32

Etudier la continuité de l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x+y}\right) & \text{si } y \neq -x \\ 0 & \text{si } y = -x \end{cases}$$

Exercice 33

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{y^2}$$

Exercice 34

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{|x - y|}$$

Exercice 35

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,b)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

où $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 36 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{yx^2}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$

*Exercice 37

1. Définir l'équivalence de normes.
2. La notion de convergence dans $\mathbb{R}^n$ dépend-elle de la norme choisie ? Si oui, donner un exemple, si non montrez-le.

Exercice 38

1. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0; \\ y & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. Montrer que l'adhérence de l'ensemble $\{(x, \sin \frac{1}{x}), x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ est donnée par $\{(x, \sin \frac{1}{x}), x > 0\} \cup \{(0, y), y \in [-1, 1]\}$.

Exercice 39

Étudier la continuité de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y) = \begin{cases} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{xy^2}} & \text{si } xy \neq 0; \\ e^x & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Exercice 40

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0).$$

Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en $(0, 0)$ et donner la valeur de $f(0, 0)$.

***Exercice 41**

1. Définir la notion de limite d'une fonction en un point.
2. Montrer que $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue ssi toutes les composantes de f sont continues.

Exercice 42

Étudier la continuité de la fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Exercice 43

Étudier la continuité de l'application suivante en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \frac{xy \cos y - y^2 \cos x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 44

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{e^{(xy)^2} - 1}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 45

Étudier la continuité de l'application suivante en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 \cos(y^{1/3}) - y^2 \cos x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 46 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2 + x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 47

Montrer que la limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+2y-3}{x+y-2}$$

n'existe pas.

Semaine 3.

Exercice 48

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y$.

1. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau L_k pour $k \in \{0, -1, 1, -3, 3\}$.
2. Dessiner dans $\mathbb{R}^3$ les fonctions partielles au point $(0, 0)$.
3. Représenter graphiquement la surface $z = x^2 - y$.

***Exercice 49**

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(K)$ ne soit pas compact.

***Exercice 50**

Donner un exemple d'application continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}$, partie bornée de $\mathbb{R}$, telles que $f(U)$ ne soit pas une partie bornée de $\mathbb{R}$.

***Exercice 51**

Donner un exemple d'application continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}$, partie fermée de $\mathbb{R}$, telles que $f(U)$ ne soit pas une partie fermée de $\mathbb{R}$.

***Exercice 52**

Donner un exemple d'application continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}$, partie ouverte de $\mathbb{R}$, telles que $f(U)$ ne soit pas une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

Exercice 53

1. Rappeler la définition d'un ensemble compact.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Soit

$$P = \{z \in \mathbb{R}^n : \|y - z\| \leq r\}$$

la boule fermée de centre y et de rayon r . Justifier que P est compact.

3. Soit

$$d(P, x) = \inf_{z \in P} \|x - z\|$$

la distance de x à P . Montrer qu'il existe $z \in P$ tel que $d(P, x) = \|x - z\|$:

***Exercice 54**

Vrai ou faux : un ensemble est compact si et seulement s'il est contenu dans une boule.

Exercice 55

Dessiner les ensembles de définition des fonctions suivantes et dire s'ils sont compacts :

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y - 1}}{\ln x} \quad g(x, y) = \ln \left(\ln \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

$$F(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\ln(2-x)} \quad \text{et} \quad h(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x - y}$$

***Exercice 56** Donner la définition d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$. Quelle est la dimension de l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

***Exercice 57** Donner la définition d'un ensemble connexe par arc.

Exercice 58

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que l'application $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto |ax + by| + |cx + dy|$ définisse une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et K un ensemble compact. Montrer que la distance $d(x, K) = \inf_{y \in K} |x - y|$ est atteinte en un point $y \in K$.

Exercice 59

1. Déterminer si l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y, y^2 \leq x\}$ est compact ou non.
2. Pour quels $p \in \{1, 2\}$ la norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ vérifie l'identité suivante : $\|x + y\|_p^p + \|x - y\|_p^p = 2\|x\|_p^p + 2\|y\|_p^p$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$?

*Exercice 60

Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0 \in F$ et on définit

$$\begin{aligned} f &: E \longrightarrow E \\ u &\longrightarrow x_0 + u \end{aligned}$$

Montrer que si $F \subset E$ est une partie fermée, alors $f(F)$ est aussi une partie fermée de E .

Exercice 61

Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0 \in F$ et on définit

$$\begin{aligned} f &: E \longrightarrow E \\ u &\longrightarrow x_0 + u \end{aligned}$$

Montrer que si $C \subset E$ est une partie compacte, alors $f^{-1}(C)$ est aussi une partie compacte de E .

Exercice 62

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$. Montrer que f n'est pas continue.

Exercice 63

Étudier la continuité de la fonction définie par $f(x, y) = \sup(x, y)$.

*Exercice 64

Rappeler la définition d'un ensemble compact. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Soit

$$P = \{z \in \mathbb{R}^n : \|y - z\| \leq r\}$$

la boule fermée de centre y et de rayon r . Justifier que P est compact.

Exercice 65

Étudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de la fonction suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| > y \\ y^2, & |x| \leq y \end{cases}$$

Exercice 66

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et K un ensemble compact. Montrer que la borne supérieure $\sup_{y \in K} |x - y|$ est atteinte en un point $y \in K$.

***Exercice 67**

1. Donner la définition de l'adhérence $\overline{A}$ d'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$.
2. Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Montrer l'inclusion

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Donner un exemple où cette inclusion est stricte.

Exercice 68

Trouver $a > 0$ tel que l'application

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{2a}y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. soit continue sur $\mathbb{R}^2$;
2. soit différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 69

Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\|(x, y)\|_2}{\|(x, y)\|_\infty}$$

***Exercice 70** Définir la notion de différentiabilité en un point.

Exercice 71

Étudier la continuité et la différentiabilité de la fonction $f(x, y) = \max(x, y)$.

Exercice 72

1. Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un compact $K \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout fermé $F \subset K$, montrer que $f(F)$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
2. Est-ce encore vrai si l'ensemble de définition de f n'est plus compact ?

Exercice 73

1. Un ensemble est dit relativement compact si son adhérence est compacte. Donner un exemple d'ensemble qui est relativement compact mais pas compact.
2. Dessiner les ensembles de définition des fonctions suivantes et dire s'ils sont compacts ou relativement compacts :

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g(x, y) = \sqrt{y - x^2} + \ln(x - y)$$

***Exercice 74**

Soient K_i (pour $i \in \mathbb{N}$) des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$. Vrai ou faux ? Justifier votre réponse.

1. L'intersection $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ est fermée.

2. L'intersection $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ est bornée.
3. L'intersection $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ est compacte.
4. La réunion $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ est bornée.
5. La réunion $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$ est compacte.

Semaine 4.

*Exercice 75

Donner la définition de la différentielle d'une fonction. Montrer qu'une fonction différentiable en un point x_0 est continue en x_0 .

*Exercice 76

Donner la définition de la différentielle d'une fonction. Montrer que si f est une fonction différentiable en un point x_0 alors λf , où $\lambda \in \mathbb{R}$ est aussi différentiable en x_0 .

*Exercice 77

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Quelle la dimension de la matrice jacobienne de f ? À l'aide des entrées de la matrice jacobienne décrire la différentielle de f .

*Exercice 78

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. Définir le vecteur gradient de f en point $a \in D$, $\text{grad} f(a)$. Montrer que $\text{grad} f(a)$ est normal à la courbe de niveau L_k , $k = f(a)$ au point a .

Exercice 79

Soit $f(x, y)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ qui a des dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}.$$

Soit $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial r}$ en tant que fonctions de r et θ .

Exercice 80

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(p) = \|p\|_2$. La fonction f est-elle différentiable en l'origine?

Exercice 81

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{2x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$. L'application est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 82

Soit $D =]0; +\infty[\times \mathbb{R}$. Soit l'application

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto y/x. \end{aligned}$$

- 1) Dessiner l'ensemble $\Gamma_k = \{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$ pour $k \in \{1, 2, -2\}$.
- 2) Montrer que l'application f est de classe C^1 sur D et calculer sa différentielle en tout point.
- 3) Le vecteur gradient $\vec{\nabla}(p)$ (pour $p \in \mathbb{R}^2$) est le vecteur de coordonnées

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right)$$

Dessiner le vecteur gradient en le point d'abscisse 1 de chacun des ensembles Γ_k (pour $k = 1, 2, -2$).
Que remarque-t-on ?

Exercice 83

Déterminer à quels points de $\mathbb{R}^2$ sont définies les dérivées partielles de f .

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leq y \end{cases}$$

*Exercice 84

Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On considère les assertions suivantes :

- A. L'application f est continue en $(0, 0)$.
- B. Les dérivées partielles $(\partial f / \partial x)(0, 0)$ et $(\partial f / \partial y)(0, 0)$ existent et sont continues.
- C. L'application f est différentiable en $(0, 0)$.

- 1) Rappeler les implications qu'il y a entre ces propriétés.
- 2) Montrer que chaque implication n'est pas une équivalence. On pourra utiliser les deux fonctions suivantes :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + y^2 \sin \frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } y = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ y^2 \sin \frac{1}{y} & \text{si } x = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{en } (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{et } g(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{en } (0, 0) \end{cases}$$

Exercice 85

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et les calculer.
3. La fonction f est-elle C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 86

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais n'y est pas différentiable.

Exercice 87

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$.

1. Dessiner les ensembles $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\}$ pour $k = 1, 4, 9$.
2. Montrer que l'application f est de classe C^1 et calculer sa différentielle $df(p)$ en tout $p \in \mathbb{R}^2$.
3. Soient $p_1 = (0, 1)$, $p_2 = (1, \sqrt{3})$ et $p_3 = (2, \sqrt{5})$. Placer ces trois points. Pour $p \in \{p_1, p_2, p_3\}$ dessiner la courbe $\{q \in \mathbb{R}^2 : df(p)(q - p) = 0\}$. Que remarque-t-on ?

Exercice 88

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$. Soit $f(x, y) = e^{xy}$. En sachant que $\gamma(0) = (1, 2)$, et $\gamma'(0) = (3, 4)$. Trouver la valeur de

$$\left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Exercice 89

Soit $z(t) = f(x(t), y(t))$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ et x et y sont des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$. Trouver une expression pour $z'(t)$. Appliquer la formule aux cas particuliers :

1. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ avec $x = t$ et $y = e^{3t}$.
2. $f(x, y) = xy^2 + x^2y$ avec $x = t^2$ et $y = \ln t$.

Exercice 90

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2y - y^3}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$. L'application est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 91

Soit $p > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) = \frac{|\sin(x + y)|^p}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

1. Pour quelles valeurs de p la fonction f se prolonge par continuité en $(0, 0)$?
2. Dans le cas où f se prolonge par continuité en $(0, 0)$, pour quelles valeurs de p la fonction ainsi obtenue est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. Même question pour la différentiabilité en $(0, 0)$.

Exercice 92 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = |x|$.

1. Calculer les dérivées partielles de f en tout point. Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer le gradient de f en tout point où il est défini et dessiner ce vecteur gradient en certains points caractéristiques.

Exercice 93

Calculer de deux manières différentes la dérivée par rapport à t de

1. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ avec $x = \sin t$ et $y = \cos t$.
2. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ avec $x = e^{-t}$ et $y = e^t$.

Exercice 94 QCM.

Attention : chaque question peut avoir plus d'une réponse correcte. Pour avoir les points à la question il est impératif de trouver toutes les réponses correctes.

1. La fonction f est définie par $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- | | |
|---|--------------------------|
| (a) est continue sur $\mathbb{R}^2$; | ☐ |
| (b) n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$; | ☐ |
| (c) admet une limite en $(0, 0)$. | ☐ |

2. La différentielle de xy est

- (a) $xdx + ydy$; ☐
 (b) $x + y$; ☐
 (c) $xdy + ydx$. ☐

3. La dérivée d'une fonction différentiable f de deux variables selon le vecteur $\vec{u}$ est donnée par la formule

- (a) $\vec{\text{grad}} f(x, y) \cdot \vec{u}$; ☐
 (b) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + t\vec{u}) - f(x, y)}{t}$; ☐
 (c) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + t\vec{u})}{t}$. ☐

4. On considère une fonction de deux variables de classe C^2 . Combien possède-t-elle de dérivées deuxièmes distincts ?

- (a) 6; ☐
 (b) 4; ☐
 (c) 3. ☐

5. En un point, le gradient d'une fonction scalaire est

- (a) parallèle aux lignes de niveaux; ☐
 (b) perpendiculaire aux lignes de niveaux; ☐
 (c) toujours orienté dans le sens des valeurs croissantes de la fonction. ☐

6. Une équation $x + y + 2xy = 5z$

- (a) représente une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$; ☐
 (b) est un plan; ☐
 (c) représente une courbe dans l'espace $\mathbb{R}^3$. ☐

Semaine 5.

Exercice 95

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrices Jacobiennes.

$$f(x, y) = e^{xy}(x + y), \quad g(x, y) = xy + yz + zx, \quad h(x, y) = (y \sin x, \cos x)$$

Exercice 96

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielles.

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x^2 - z^2}{2}, \sin x \sin y \right), \quad g(x, y) = \left(xy, \frac{x^2}{2} + y, \ln(1 + x^2) \right)$$

Exercice 97

On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \text{ et } g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y + z \end{pmatrix}$$

On considère aussi $h = f \circ g$.

1. Expliciter h . Montrer que f, g et h sont de classe C^1 et écrire leur jacobien.
2. Vérifier que $J_{h(x, y, z)} = J_{f(g(x, y, z))} \circ J_{g(x, y, z)}$

Exercice 98

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Calculer les dérivées (le cas échéant partielles) des fonctions suivantes :

$$(a) g(x, y) = f(y, x), (b) h(x) = f(x, x), (c) l(x, y) = f(y, f(x, x)), (d) k(x) = f(x, f(x, x))$$

***Exercice 99**

1. Exprimer la dérivée directionnelle en fonction des dérivées partielles.
2. Montrer qu'une application à valeurs vectorielles est différentiable ssi toutes ses composantes sont différentiables.

***Exercice 100**

1. Définir la matrice de Jacobi pour une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
2. Exprimer (en montrant la formule énoncée) la matrice de Jacobi de $f \circ g$ en fonction des matrices de Jacobi de f et g .

***Exercice 101**

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un domain U de $\mathbb{R}^2$. Définir la dérivée de f selon un vecteur v au point $a \in U$, $D_{\vec{v}}f(a)$. Démontrer que $D_{\vec{v}}f(a) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{v}$.

***Exercice 102**

1. Définir la notion de limite d'une fonction en un point.
2. Montrer que la somme de deux fonctions différentiables en un point est différentiable en ce point.

***Exercice 103**

1. Pour une fonction différentiable de gradient non-nul, suivant quelle direction la dérivée directionnelle est maximale ?
2. Montrer que le gradient d'une fonction différentiable s'annule en un point de maximum ou minimum local.

Exercice 104

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - \sin y \leq 4\}$$

est-il fermé, compact ?

Exercice 105

Déterminer si la fonction

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \mapsto \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

se prolonge par continuité en $(0, 0)$.

Exercice 106

Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x, y) = xy^2$ suivant le vecteur $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ au point A de coordonnées $(2, 1)$.

Exercice 107

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant

$$\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] ; \cos(x) \geq 0\}$$

est-il ouvert, fermé, compact ?

Exercice 108

Déterminer si la fonction

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \longmapsto \frac{x^6}{x^2 + (y - x)^2}$$

se prolonge par continuité en $(0, 0)$.

Exercice 109

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x + 5y + x^2(\sqrt{|y|} + \sqrt{|x|})$. Déterminer l'ensemble des points où f

1. est continue ;
2. est différentiable ;
3. est de classe C^1 ;
4. admet des dérivées partielles ;
5. admet des dérivées directionnelles.

***Exercice 110** Montrer que le produit de deux fonctions différentiables en un point est différentiable en ce point.

Semaine 6.

Exercice 111

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

1. Dans $\mathbb{R}^2$ dessiner quelques lignes de niveau de f .
2. Dessiner le graphe de la fonction f , $z = x^2 + 4y^2$.
3. Trouver le gradient de $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ et vérifier que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$ est orthogonal à la ligne de niveau $k = f(x, y)$ dans tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. En utilisant les résultats des questions précédentes dessiner sur la surface $z = x^2 + 4y^2$ le chemin le plus court de descente du point $(2, 1, 8)$ vers le point $(0, 0, 0)$.

Exercice 112

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que son gradient au point $(2, 3)$ est $(4, -1)$ et $f(2, 3) = 7$.

1. Donner la définition d'un point critique d'une fonction.
2. Est-ce que $(2, 3)$ un maximum ou minimum local de f , ou ni l'un ni l'autre ? Justifier brièvement.
3. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $f(2 + \epsilon, 3 - \epsilon)$ est-il plus grand ou plus petit que 7 ? Justifier votre réponse.
4. On définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(2t^2, t^3 + 2)$. Trouver la valeur de la dérivée de g au point $t = 1$.

*Exercice 113

Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction de classe C^1 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Démontrer que la dérivée de f selon le vecteur V au point $X \in U$ est égale au produit scalaire de V et du gradient de f au point X .

Exercice 114

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = ye^{-(x^2+y^2)}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et écrire la formule de Taylor de f à l'ordre 2 en $(0, 0)$. En déduire une valeur approchée de $f(x, y)$ pour $x = 0.1$ et $y = 0.2$.

Exercice 115

Trouver les extrêma relatifs de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2.$$

La fonction possède-t-elle des extrêma absolus sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 116

Déterminer les extrêma de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$.

Exercice 117

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

Trouver les extrêma locaux de la fonction f .

Exercice 118

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$. Déterminer les extrêma (éventuels) de la fonction f et pour chacun de ces extrêma, préciser si c'est un minimum ou un maximum.

Exercice 119

Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 3xy - 3x^2 - y^3 \end{aligned}$$

1. Etudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $P = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Déterminer les extrema absolus (=globaux) de la restriction de f à l'ensemble P .

Exercice 120

Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x^2 + y^2)(x + y) - 3xy - 9 \end{aligned}$$

1. Etudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit D le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 4.
 - (i) Justifier que la restriction de f à D admet son maximum absolu (=global) sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 4.
 - (ii) Trouver une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui permet de calculer le maximum absolu de la restriction de f à D .

Exercice 121

Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 4xy - x^4 - y^4 \end{aligned}$$

1. Etudier les extrema relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $P = [0, 8] \times [0, 8]$. Déterminer les extrema absolus de la restriction de f à l'ensemble P .

Exercice 122

Soit $a > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) = \frac{|xy|^a}{x^2 + y^2}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la fonction f se prolonge par continuité en $(0, 0)$?
2. Dans le cas où f se prolonge par continuité en $(0, 0)$, pour quelles valeurs de a la fonction ainsi obtenue est des classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Même question pour la différentiabilité en $(0, 0)$.

*Exercice 123

Définir la matrice de Hesse pour une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 124

Déterminer les extrema (éventuels) de la fonction suivante

$$]0, \infty[\times \mathbb{R} \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) = x(\ln(x^2 + y^2)).$$

En ces points d'extrema, calculer la formule de Taylor à l'ordre 2.

*Exercice 125

1. Énoncer le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange.
2. Montrer qu'une application à valeurs vectorielles est différentiable ssi toutes ses composantes sont différentiables.

Exercice 126

Soit $p > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) = \frac{|\sin(x + y)|^p}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

1. Pour quelles valeurs de p la fonction f se prolonge par continuité en $(0, 0)$?
2. Dans le cas où f se prolonge par continuité en $(0, 0)$, pour quelles valeurs de p la fonction ainsi obtenue est des classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Même question pour la différentiabilité en $(0, 0)$.

Exercice 127

1. Montrer que -1 est la seule racine négative de l'équation $x = \ln|x| + \frac{1}{x}$.
2. Déterminer les extrema (éventuels) de la fonction $g(x, y) = xe^y + ye^x$.

Exercice 128

Soit

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x + y$$

où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}.$$

Représenter graphiquement l'ensemble D et déterminer les extrema globaux de f .

Exercice 129

Déterminer les extrema (éventuels) de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sin x \sin y.$$

Pour chacun de ces extréma, préciser si c'est un minimum ou un maximum, si c'est local et/ou global et calculer le développement limité (la formule de Taylor) à l'ordre 2 au voisinage de chacun des points critiques de f .

***Exercice 130**

Montrer que le gradient d'une fonction différentiable s'annule en un point de maximum ou minimum local.

Exercice 131

Soit $\lambda > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 2\lambda xy.$$

1. Montrer que (x_0, y_0) est un point critique de f si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

2. Déterminer selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ les extréma de la fonction f .

Exercice 132

Sur la courbe $y = x^2$, $x \in]-\infty, \infty[$ trouver le point le plus proche au point $(0, b)$, où b est un nombre réel fixé.

Exercice 133

Soit $\lambda > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto g(x, y) = (\lambda^2 + 1)(x^2 + y^2) + 4\lambda xy - 2(\lambda + 1)(x + y)$$

Déterminer selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ les extréma de la fonction g .

Exercice 134

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = xe^y + ye^x.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en $(0, 0)$. En déduire une valeur approchée de $f(x, y)$ pour $x = 0.1$ et $y = 0.2$.

Semaine 7.

***Exercice 135**

Donner la définition du vecteur gradient au point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ d'une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que ce vecteur est normal à la ligne de niveau au point (a, b) .

***Exercice 136**

Montrer sur un dessin les ensembles de points $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = -2\}$ pour la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x - y + |y - x| \end{aligned}$$

***Exercice 137**

Donner la définition du vecteur gradient au point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ d'une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Définir la dérivée directionnelle d'une application en un point. Soit f une application de classe C^1 . Expliciter la formule de la dérivée directionnelle en fonction du vecteur gradient et vérifier cette formule.

***Exercice 138**

Définir les points critiques d'une application. Définir les notions d'extremum local et global.

***Exercice 139**

Enoncer et démontrer le lien entre le gradient en un point de $\mathbb{R}^2$ et les pentes sur une ligne de niveau d'une application de classe C^1 .

***Exercice 140**

Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue en $(0, 0)$ mais qui n'y est pas différentiable. Justifiez votre réponse.

***Exercice 141**

Montrer sur un dessin les ensembles de points $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 2\}$ pour la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{xy - x + y}{xy} \end{aligned}$$

Exercice 142 Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ au point $(1, \sqrt{2}, 1)$.

***Exercice 143** Définir l'opérateur de Laplace et l'exprimer en fonction de la matrice hessienne.

***Exercice 144**

Soit $f : U \longrightarrow V$ avec U et V des parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$). Définir la différentiabilité de f en un point $a \in U$.

Exercice 145 Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ au point $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

***Exercice 146**

1. Définir l'opérateur $\overrightarrow{\text{rot}}$.
2. Montrer qu'une fonction différentiable en x_0 est continue en x_0 .

Exercice 147

Calculer Δf pour $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha$.

***Exercice 148**

1. Pour une fonction différentiable de gradient non-nul, suivant quelle direction la dérivée directionnelle est maximale ?
2. Montrer que le gradient d'une fonction différentiable s'annule en un point de maximum ou minimum local.

Exercice 149

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

1. Quelle est la nature de la ligne de niveau de f qui passe par le point de coordonnées $p = (3/2, 3\sqrt{3}/2)$? Donner une paramétrisation.
2. Calculer le vecteur tangent à cette ligne de niveau en p .

3. Calculer le gradient de f en p . Quel angle fait-il avec le vecteur tangent précédemment calculé ?

Exercice 150

Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$\vec{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{V}(x, y) = (x + ay, 2x + 4y).$$

1. Déterminer a pour que l'on ait $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = 0$.
2. Pour ces valeurs de a , déterminer une fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}g$.
3. Trouver les extréma (éventuels) de la fonction g .

*Exercice 151

Définir l'opérateur divergence et l'exprimer en fonction de la matrice de Jacobi.

*Exercice 152

1. Définir l'opérateur de Laplace et l'exprimer en fonction de la matrice hessienne.
2. Montrer que le produit de deux fonctions différentiables en un point est différentiable en ce point.

Exercice 153

Soit $\lambda > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto g(x, y) = (\lambda^2 + 1)(x^2 + y^2) + 4\lambda xy - 2(\lambda + 1)(x + y)$$

Déterminer selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ les extréma de la fonction g .

Exercice 154

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On suppose la fonction f constante sur la sphère unité $S = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| = 1\}$. Montrer qu'il existe un point critique $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|p\| < 1$.

Exercice 155

1. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 + 9x^2 = 1\}$. Quelle est la nature de l'ensemble E ? Dessiner E .
2. On veut trouver le maximum et le minimum de la fonction $f(x, y) = 4y^2 - 3x^2$ sur l'ensemble E . Justifier que ce maximum et ce minimum existent.
3. Pour cela on pose $g(x, y) = 4y^2 + 9x^2 - 1$. Calculez le gradient de f et le gradient de g .
4. Poursuivre le raisonnement en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

Exercice 156

Un champ de vecteurs est une application $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit qu'un champ de vecteurs est un champ de gradient s'il existe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $X(p) = \vec{\nabla} f(p)$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n$. Parmi les champs de vecteurs suivants, lesquels sont des champs de gradient :

$$X_1(x, y) = (2xy, x^2) \quad X_2(x, y) = (x^2, xy) \quad X_3(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

*Exercice 157

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x \sin y, y \sin x, z)$. Calculer $\text{div}(f)$, $\overrightarrow{\text{rot}}(f)$ et $\overrightarrow{\text{grad}} \circ \text{div}(f)$.

*Exercice 158

On considère les opérateurs div , $\overrightarrow{\text{rot}}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}$ en dimension deux. Préciser (avec démonstration) lesquelles des identités suivantes sont vraies :

1. $\overrightarrow{\text{rot}} \circ \text{div} = 0$;
2. $\text{div} \circ \overrightarrow{\text{rot}} = 0$;
3. $\text{div} \circ \overrightarrow{\text{grad}} = 0$;
4. $\overrightarrow{\text{grad}} \circ \text{div} = 0$;
5. $\overrightarrow{\text{rot}} \circ \overrightarrow{\text{grad}} = 0$;
6. $\overrightarrow{\text{grad}} \circ \overrightarrow{\text{rot}} = 0$;
7. $\overrightarrow{\text{grad}} \circ \text{div} \circ \overrightarrow{\text{rot}} = 0$;
8. $\text{div} \circ \overrightarrow{\text{rot}} \circ \overrightarrow{\text{grad}} = 0$.

Exercice 159

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$.

1. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau L_k pour $k \in \{0, -1, 1, -3, 3\}$.
2. Dessiner dans $\mathbb{R}^3$ les fonctions partielles au point $(0, 0)$.
3. Représenter graphiquement la surface $z = x^2 - y^2$.

Exercice 160

On considère le champ de vecteur $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\overrightarrow{f}(x, y, z) = (xy^2z^2, x^2yz^2, x^2y^2z + 1).$$

1. Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{f})$.
2. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\text{grad}}g$.
3. Pour une telle fonction g , calculer les extréma sur l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$.

Exercice 161

À tout point M de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on associe le vecteur unitaire $\overline{u}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$. Calculer la divergence de ce champ de vecteurs.

*Exercice 162

Définir l'opérateur divergence et l'exprimer en fonction de la matrice de Jacobi.

Exercice 163

Déterminer si les matrices suivantes sont des matrices hessiennes d'une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ x-y & y^2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}$$

Si oui, trouver toutes les fonctions f associées.

*Exercice 164

QCM.

Attention : *chaque question peut avoir plus d'une réponse correcte. Pour avoir les points à la question il est impératif de trouver toutes les réponses correctes.*

1. Soit f une fonction de classe C^2 définie sur D_f une partie de $\mathbb{R}^2$. Si f présente un minimum local en (x_0, y_0) et $(x, y) \in D_f$ est un point au voisinage de (x_0, y_0) , alors :

- (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$; ☐
- (b) $\overrightarrow{\text{grad}}f(x_0, y_0) = \vec{0}$; ☐
- (c) $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. ☐

2. La fonction $f(x, y) = x^{2008} + y^{2008}$

- (a) possède un maximum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (b) possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
- (c) possède un maximum sur le carré $C = \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. ☐

3. Une application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

- (a) est un champ de vecteurs; ☐
- (b) est une courbe dans l'espace; ☐
- (c) peut être un plan dans l'espace. ☐

4. Soit $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. La divergence de $\vec{F}$, $\text{div} \vec{F}$, est égale à

- (a) 0; ☐
- (b) 3; ☐
- (c) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. ☐

5. Soit $\vec{V} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$. Le rotationnel de $\vec{V}$, $\text{rot} \vec{V}$, est égal à

- (a) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & yz & xz \end{vmatrix}$; ☐
- (b) $-x - y - z$; ☐
- (c) $-(y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k})$; ☐
- (d) $\nabla \wedge \vec{V}$. ☐

6. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$. Alors :

- (a) $\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$ est toujours $\vec{0}$; ☐
- (b) $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$ est toujours 0; ☐
- (c) $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est une application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$. ☐

7. L'expression $df(x) = f'(x)dx$

- (a) est une expression approchée; ☐
- (b) est une définition; ☐
- (c) est vrai de temps en temps. ☐

8. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\overrightarrow{\text{grad}} r$ est

- (a) $\vec{r}/r$; ☐
- (b) $(x + y + z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; ☐
- (c) $-\vec{r}/r$. ☐

9. Une équation $x + y + 2xy = 5z$

- (a) représente une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$; ☐
- (b) est un plan; ☐
- (c) représente une courbe dans l'espace $\mathbb{R}^3$. ☐

Semaine 8.

Exercice 165

Calculer la longueur de la courbe paramétrée $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (-\frac{4}{3}t^3 + t - 2, 2t^2 + 7)$.

Exercice 166

Calculer la longueur de la courbe paramétrée $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos t + \cos^2 t, \sin t + \sin t \cos t)$.

Exercice 167

Utiliser le théorème des fonctions implicites pour calculer la dérivée de y par rapport à x au point $(2, 3)$, y étant défini par la relation $x^2 + y^2 - 13 = 0$.

Exercice 168

Soit $(u, v) \rightarrow f(u, v)$ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$g(x, y) = f\left(\arctan \frac{y}{x}, \arctan \frac{x}{y}\right).$$

Vérifier les hypothèses du théorème des fonctions implicites pour la relation $g(x, y) = 0$. Sur quel domaine cette relation définit une fonction implicite $y = j(x)$? Calculer sa dérivée $j'(x)$ (il faudra utiliser la règle de chaîne pour la fonction composée). Expliciter la fonction j .

(la solution de ce problème est donnée sur la page

<http://nte-serveur.univ-lyon1.fr/immediato/> suivre les liens vers l'analyse puis fonctions implicites, exercices)

Exercice 169

Soient $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + 4y - 16$ deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Maximiser la fonction $f(x, y)$, sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Exercice 170

Pour $x \in [0, 1]$ calculer la longueur de la courbe $y = x^{3/2}$.

Exercice 171

Définir l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles le long d'une courbe de classe C^1 .

*Exercice 172

Montrer que $|\int_{\gamma} f \cdot ds| \leq L(\gamma) \max_{\gamma} \|f\|$, où f est une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$, γ est une courbe plane et $L(\gamma)$ sa longueur.

*Exercice 173

Soit $f(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Soit Γ une courbe plane. Expliquer la formule :

$$\int_{\Gamma} f \cdot ds = \int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Exercice 174

1. Soit $\gamma = (x(t), y(t))_{t \in [a; b]}$ une courbe paramétrée. Rappeler la formule donnant la longueur de cette courbe.
2. Soit Γ une courbe paramétrée en coordonnées polaires par $\rho = \rho(t)$ et $\theta = \theta(t)$ où $t \in [a; b]$. Montrer que la longueur de Γ est

$$\int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2} dt.$$

3. Soit γ la courbe d'équation polaire $\rho = 2(1 + \cos \theta)$ pour $\theta \in [-\pi; \pi]$. Donner une paramétrisation en coordonnées polaires de cette courbe et calculer sa longueur.

Exercice 175

Pour $r > 0$, soit (Γ_r) la courbe d'équation $x^2/2 + y^2/3 = r^2$.

1. Quelle est la nature de Γ_r ? Donner une paramétrisation.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + xy^2$. Donner la valeur de f en un point de la courbe.
3. La fonction f a-t-elle un maximum et un minimum sur la courbe? Si oui, calculer chacun en fonction de r .
4. Soit E la partie du plan d'équation $x^2/2 + y^2/3 \leq 1$. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de f sur E ?

Exercice 176 Soit $\vec{F} = r^2(x\vec{i} + y\vec{j})$ où $r = x^2 + y^2$.

1. Calculer $\frac{\partial r}{\partial x}$ et $\frac{\partial r}{\partial y}$.
2. Trouver $\text{rot } \vec{F}$.

Exercice 177

1. Paramétrer la courbe d'équation $9x^2 + 4y^2 - 8y = 32$.
2. Montrer que le point de coordonnées $(1, \frac{2+3\sqrt{3}}{2})$ appartient à la courbe et trouver le vecteur tangent en ce point.
3. Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$ sur la courbe.

Semaine 9.

*Exercice 178

1. Donner la définition d'orientation d'une courbe.
2. Considérons la courbe donnée par l'équation $x = y^2$, $y \in [-3, 3]$. Ecrire deux paramétrisations de cette courbe donnant deux orientations opposées.

*Exercice 179

Montrer que l'intégrale curviligne d'un champ de gradient ne dépend que des extrémités du chemin.

*Exercice 180

Donner la définition de l'intégrale curviligne d'une fonction à valeurs réelles le long d'une courbe de classe C^1 par morceaux.

*Exercice 181

1. Énoncer le théorème de Poincaré.
2. Définir les notions de *simplement connexe* et *connexe par arcs*.
3. Donner un exemple de domaine non simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ et vérifiez votre exemple.

*Exercice 182

1. Énoncer le théorème de Poincaré.
2. Donner les propriétés de l'intégrale curviligne d'un champ de gradient.

***Exercice 183**

Définir l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles le long d'une courbe de classe C^1 par morceaux.

Exercice 184

On considère le champ de vecteur suivant sur $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{V}(x, y) = (2xy + y^2 - 1)\vec{i} + (2xy + x^2)\vec{j}.$$

1. Calculer l'intégrale curviligne de ce champ le long du segment de droite reliant les points $A = (1, 0)$ et $B = (0, 1)$ orienté de A vers B .
2. Sans avoir cherché le potentiel scalaire déterminer si $\vec{V}$ est un champ de gradient.
3. Soit Γ la courbe allant de A à B de paramétrisation

$$\begin{cases} x(t) = \cos^5 t \\ y(t) = \sin^4 t \end{cases} ; \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Calculer la circulation du champ $\vec{V}$ le long de Γ .

Exercice 185

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{C^-} (2x - 2y)dx + (x^2 + y^2)dy$$

où C^- est le cercle de centre O et de rayon R décrit complètement dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exercice 186

Calculer l'intégrale $\int_{\Gamma} \ln(x + y + z)ds$ où Γ est le segment de droite joignant le point $(1, 1, 1)$ au point $(2, 3, 4)$.

Exercice 187

Calculer l'intégrale $\int_{\Gamma} x^5 ds$ où Γ est l'arc d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ d'extrémités $(1, 1)$, $(4, 1/4)$.

Exercice 188

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2} dy$$

où Γ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 avec l'orientation directe.

Exercice 189

1. Ecrire une équation de la droite D passant par les points $(1, 1)$ et $(2, 4)$.
2. Calculer la valeur de l'intégral

$$\int_C (y - x)dx + (y + x)dy,$$

où C est un segment de la droite D entre les points $(1, 1)$ et $(2, 4)$.

Exercice 190 Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{C^+} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$$

où C^+ est le cercle de centre O et de rayon R décrit complètement dans le sens direct.

Exercice 191

Calculer l'intégrale $\int_{\Gamma} z^3 ds$ où Γ est la courbe paramétrée par $x = t^3 + 3t$, $y = t^3 - 3t$, $z = 3t$.

Exercice 192

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma} (x - y^2)dx - (x + y^2)dy$$

où Γ est le quart de cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 parcouru du point $(1,0)$ au point $(0,1)$.

Exercice 193

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma} (x - y^3)dx + x^3 dy$$

où Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 avec l'orientation directe.

Semaine 10

***Exercice 194**

Énoncer la formule de changement de variables dans une intégrale double.

***Exercice 195**

Énoncer le théorème de Fubini.

***Exercice 196**

Donner la définition d'une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$.

***Exercice 197**

Donner une formule de calcul d'aire d'une partie quarrable à l'aide d'une intégrale curviligne.

***Exercice 198**

Énoncer le théorème de Green-Riemann. Donner une démonstration pour un champs de vecteur de la forme $\vec{V} = Q(x, y) \vec{j}$ sur un domain carré de sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$.

***Exercice 199**

Quel est le sens géométrique d'une intégrale double d'une fonction continue f sur une partie quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$?

Quel est le sens géométrique d'une intégrale double d'une fonction $f(x, y) \equiv 1$ sur une partie quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$?

Exercice 200

Calculer $\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq x - 1\}$.

Exercice 201

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C xy dy$$

où C est l'arc de cercle défini par $x = \cos t$, $y = \sin t$, t variant de 0 à π .

Exercice 202

Soit $\gamma(t) = (3 \cos t, 5 \sin t, 4 \cos t)$, $t \in [0, \pi]$ une représentation paramétrique d'une courbe Γ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la valeur absolue du vecteur tangent ne dépend pas de t .
2. Ecrire l'équation de la droite tangente au point $A = (\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 2)$.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Γ avec le plan yz .

Exercice 203

Soit $\vec{F} = ay \vec{i} + bx \vec{j}$, $a, b \in \mathbb{R}$ un champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Trouver la relation entre a, b si l'intégrale curviligne de $\vec{F}$ le long n'importe quelle courbe simple, C , est égale à l'aire du domain plain D dont C est la frontière.

Exercice 204

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma} (x - y^2)dx - (x + y^2)dy$$

où Γ est le quart de cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 parcouru du point $(1, 0)$ au point $(0, 1)$.

Exercice 205

Calculer l'intégrale $\int_{\Gamma} z^3 ds$ où Γ est la courbe paramétrée par $x = t^3 + 3t$, $y = t^3 - 3t$, $z = 3t$.

Exercice 206

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

1. Quelle est la nature de la ligne de niveau de f qui passe par le point de coordonnées $p = (3/2, 3\sqrt{3}/2)$? Donner une paramétrisation.
2. Calculer le vecteur tangent à cette ligne de niveau en p .
3. Calculer le gradient de f en p . Quel angle fait-il avec le vecteur tangent précédemment calculé ?

Exercice 207

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2} dy$$

où Γ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 avec l'orientation directe.

Exercice 208

Calculer l'intégrale $\int_{\Gamma} x^5 ds$ où Γ est l'arc d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ d'extrémités $(1, 1)$, $(4, 1/4)$.

Exercice 209

Changer l'ordre d'intégration et calculer l'intégrale double

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2xy}{1 - y^4} dy dx.$$

Exercice 210

Calculer l'intégrale

$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz, \text{ avec } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Exercice 211

Déterminer les points d'intersection des deux courbes de $\mathbb{R}^2$ d'équations $y = 2x$ et $y = 4x - 2x^2$ puis représenter

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \leq y \leq 4x - 2x^2\}$$

et calculer l'aire de T .

Semaine 11.

Exercice 212 QCM. Attention : *chaque question peut avoir plus d'une réponse correcte. Pour avoir les points à la question il est impératif de trouver toutes les réponses correctes.*

1. Le changement de variables $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$ a pour jacobien $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)}$:

- (a) -1 ; ☐
- (b) 1 ; ☐
- (c) ρ ; ☐
- (d) $\rho^2 \cos \theta \sin \theta$. ☐

2. Une intégrale $\int_{\Gamma} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt$

- (a) est une intégrale triple sur le domaine Γ ; ☐
- (b) calcule la longueur de la courbe Γ ; ☐
- (c) calcule l'aire de la surface Γ . ☐

3. Soit Δ le triangle défini par les trois droites : $x = 0$, $y = 1$ et $y = x$.

L'intégrale double $\iint_{\Delta} x e^{xy} \, dx \, dy$ est égale à

- (a) $\int_0^1 \left(\int_0^1 x e^{xy} \, dx \right) \, dy$; ☐
- (b) $\int_0^1 \left(\int_0^y x e^{xy} \, dx \right) \, dy$; ☐
- (c) $\int_0^1 \left(\int_x^1 x e^{xy} \, dy \right) \, dx$; ☐
- (d) $\int_0^1 \left(\int_0^x x e^{xy} \, dy \right) \, dx$. ☐

4. Parmi les systèmes d'équations suivantes lesquelles définissent une courbe dans $\mathbb{R}^3$?

- (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; ☐
- (b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = y \end{cases}$; ☐
- (c) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sin t \end{cases}$. ☐

5. L'aire d'une partie quarrable $D \in \mathbb{R}^2$ avec le bord C est égale à

- (a) $\int_C xdy$; ☐
- (b) $\iint_D dx dy$; ☐
- (c) $\int_C xdy + ydx$. ☐

6. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 - x^2y + y^3 - 2x^2 + 2x - y^2$

- (a) Le point $(0, 1)$ n'appartient à la ligne de niveau 0; ☐
- (b) le théorème des fonctions implicites s'applique en $(0, 1)$; ☐
- (c) L'équation de la tangente à la courbe $f(x, y) = 0$ en $(0, 1)$ c'est $x + y = 2$. ☐

7. L'intégrale curviligne sur une courbe $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$ d'un champ de gradient

- (a) est toujours nulle; ☐
- (b) ne dépend pas du chemin; ☐
- (c) est toujours positive. ☐

8. Soit $f : U \rightarrow V$ avec U et V des parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$). Les propositions suivantes sont correctes :

- (a) si la fonction f est différentiable elle est continue; ☐
- (b) si f possède toutes les dérivées partielles elle est différentiable; ☐
- (c) si f est de classe C^1 elle est continue; ☐
- (c) si f est de classe C^1 ses dérivées partielles forment une matrice antisymétrique. ☐

Semaine 12.

Exercice 213 Déterminer l'aire de la partie D du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 214 a) Calculer $\int \int_D (x - y) dx dy$ où D est une partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = -x$$

b) Calculer la même intégrale au moyen du changement de variables défini par :

$$u = x + y, \quad v = x - y$$

Exercice 215 Calculer $\int \int_D xy dx dy$ où D est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

Exercice 216 Soit $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La droite d'équation $y = x$ délimite dans les carré $[0, 1] \times [0, 1]$ deux triangles égaux T_1 et T_2 . Montrer que en général,

$$\int \int_{T_1} f(x, y) dx dy \neq \int \int_{T_2} f(x, y) dx dy.$$

Puis, en utilisant le changement de variable $u = y$, $v = x$, montrer que

$$\int \int_{T_1} xy dx dy = \int \int_{T_2} xy dx dy.$$

Exercice 217 Soit D le quart de disque unité défini par :

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale :

$$I = \int \int_D (4 - x^2 - y^2) \, dx dy.$$

Exercice 218 Calculer $I = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y^2}{2} \leq x \leq 2\}$

Exercice 219

Soit $I = \iint_{T_a} \sqrt{xy} e^{-x-y} \, dx dy$ avec $T_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a\}$ et $a > 0$. On considère le changement de variables $\begin{cases} x = tu \\ y = (1-t)u \end{cases}$

Calculer I .

Exercice 220 Aire en coordonnées polaires

Soit D le domaine limité par $r = p(\phi)$ avec $0 \leq \phi \leq 2\pi$; et le segment $\begin{cases} \phi = 0 \\ p(0) \leq r \leq p(2\pi) \end{cases}$

1. Montrer que $\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2(\phi) \, d\phi$
2. Aire de la cardioïde : $r = 1 + \sin(\phi)$.
3. Aire de l'escargot ; $r = a\phi$
4. Dessiner les lignes de coordonnées $r = C^{te}$ et $\phi = C^{te}$ dans le plan des x, y
5. Dessiner les lignes de coordonnées $x = C^{te}$ et $y = C^{te}$ dans le plan des r, ϕ .

Exercice 221

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Montrer que la fonction

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) = \frac{axy + by^2}{x^2 + y^2}$$

n'a pas de limite en $(0, 0)$.

***Exercice 222**

1. Définir la norme d'une application linéaire.
2. Montrer que si f est continue et K est compact alors $f(K)$ est compact.

Exercice 223

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{e^{(xy)^2} - 1}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 224

Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\|(x,y)\|_\infty}{\|(x,y)\|_1}$$

Exercice 225

Déterminer à quels points de $\mathbb{R}^2$ sont définies les dérivées partielles de f .

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 226

1. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^3 - 4e^y > 4\}$$

est-il borné, fermé, compact ?

2. Déterminer si la fonction

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \longmapsto \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$$

se prolonge par continuité en $(0,0)$.

Exercice 227

Soit $p > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{|\sin(x+y)|^p}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1. Pour quelles valeurs de p la fonction f se prolonge par continuité en $(0,0)$?
2. Dans le cas où f se prolonge par continuité en $(0,0)$, pour quelles valeurs de p la fonction ainsi obtenue est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Même question pour la différentiabilité en $(0,0)$.

Exercice 228

1. Soit $s \in \mathbb{R}_+$. Soit $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n : x_1 + \dots + x_n = s\}$. Soit $f : (\mathbb{R}_+)^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, trouver la valeur maximale atteinte par f dans l'ensemble D .
2. Dédire de la question précédente que, pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$, on a l'inégalité :

$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Exercice 229

Trouver la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ au point $(2,1)$ suivant la direction $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

Exercice 230

Exercice 231 Définir l'opérateur de de Rham (différentielle extérieure) en dimension 3 et calculer $d\alpha$ où

$$\alpha = x^2 y dx + z dy + (y + x + 2z) dz$$

et $d\alpha$ où

$$\omega = x^2 y dy \wedge dz + z dz \wedge dx + (y + x + 2z) dx \wedge dy$$

Exercice 232 Simplifier

$$2dx \wedge dz \wedge dy + 3dz \wedge dy \wedge dx - dy \wedge dz \wedge dx + 5dx \wedge dx \wedge dx - 17dz \wedge dz \wedge dy$$