Math IV - analyse - CC

Correction de l'Examen du 3.05.2011

I. (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{2x^2+xy+2y^2}$

en polaires : $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$

$x^2+y^2 = r^2$

$(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow \|(x,y)\|\to 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}\to 0 \Leftrightarrow r\to 0$

$= \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3\cos^2 t\sin t}{2r^2 + r^2\cos t\sin t} = 0$

car $|\cos^2 t \sin t| < 1$

et $1 < 2+\cos t\sin t < 3$

donc $\left|\dfrac{\cos^2 t\sin t}{2+\cos t\sin t}\right| < 1$ - borné

Donc $\lim\limits_{r\to 0} r\cdot\dfrac{\cos^2 t\sin t}{2+\cos t\sin t} = 0.$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \ln\left(\dfrac{1+x+2y}{3y^2-x}\right)$

la fonction est défini et continue en $(2,-1)$, par conséquent, la limite est égale à la valeur

$$\ln\left(\frac{1+2+2\cdot(-1)}{3\cdot(-1)^2-2}\right) = \ln\frac{1}{1} = 0$$

II 1) $U(x,t)$ a pour matrice Jacobienne $\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} \quad \dfrac{\partial U}{\partial t}\right)$. On considère $F(x+ct)$ et $G(x-ct)$ comme des fonctions composées $u : (x,t)\longmapsto x+ct$

$F : u \longmapsto F(u)$

et $\quad V : (x,t) \longmapsto x - ct$

$G : v \longmapsto F(v)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dF}{du}\bigg|_{u=x+ct} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dG}{dV}\bigg|_{V=x-ct} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dF}{du}\bigg|_{u=x+ct} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial V}\bigg|_{V=x-ct} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

Donc la matrice Jacobienne :

$$\Bigg(\underbrace{F'(x+ct)\cdot 1 + G'(x-ct)\cdot 1}_{\frac{\partial U}{\partial x}} \quad \underbrace{F'(x+ct)\cdot c + G'(x-ct)\cdot(-c)}_{\frac{\partial U}{\partial t}} \Bigg)$$

2) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = F''(x+ct)\,\frac{\partial(x+ct)}{\partial x} + G''(x-ct)\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial x}$$
$$= F''(x+ct) + G''(x-ct)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = F''(x+ct)\cdot c \cdot \frac{\partial(x+ct)}{\partial t} + G''(x-ct)(-c)\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}$$
$$= c^2\big(F''(x+ct) + G''(x-ct)\big)$$

La relation est donc

$$\boxed{c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0}$$

III. 1) Une fonction est différentiable au point (x,y) si $\exists$ une application linéaire $df(x,y)$ t.q.

$$\lim_{\|(h,k)\|\to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - df(x,y)\binom{h}{k}}{\|(h,k)\|}$$

$(h,k) \in \mathbb{R}^2$, $df(x,y)$ est donné par la matrice jacobienne, ici $\frac{\partial f}{\partial x} = y - 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$

$$\lim_{\|(h,k)\| \to 0} \frac{(x+h)(y+k) - (x+h)^3 - (xy - x^3) - (y - 3x^2)h - x \cdot k}{\|h,k\|}$$

$$= \lim_{\|(h,k)\| \to 0} \frac{xy + hy + xk + hk - x^3 - 3hx^2 - 3h^2x - xy + x^3 - yh - 3x^2h - xk}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim_{\|(h,k)\| \to 0} \frac{hk - 3h^2k}{\|(h,k)\|} = \lim_{\sqrt{h^2+k^2} \to 0} \frac{hk - 3h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$h = r\cos t$
$k = r\sin t$
$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^2(\cos t \sin t - 3r\cos^2 t \sin t)}{r} = 0$$

On a choisi la norme euclidienne, mais les normes sont équivalentes dans $\mathbb{R}^2$, cela implique que cette lim est 0 indep. de la norme.

Le choix de (x,y) étant arbitraire on a montré que f est différentiable partout.

2. Le gradient de F au pt (x,y,z) est le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial F/\partial x \\ \partial F/\partial y \\ \partial F/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 3x^2 \\ x \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, F(2,4,0) = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

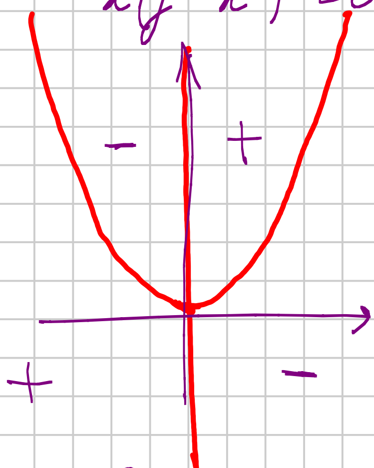
Le vecteur de coordonnées $(x-2, y-4, z-0)$ appartient au plan tangent au graph de $F(x,y,z) = 0$ au point $(2,4,0)$ si il est orthogonal au vecteur-gradient : produit scalaire étant 0, nous donne l'équation du plan

$$\begin{pmatrix} x-2\\ y-4\\ z-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\2\\-1\end{pmatrix} = -8(x-2)+2(y-4)+(-1)\cdot z$$

$$\boxed{-8x+2y-z+8=0}$$

3. $f(0,0)=0 \rightarrow$ ligne de niveau 0 $\quad xy-x^3=0$

$x(y-x^2)=0 \iff x=0$ ou $y=x^2$



Pour les signes : on a 4 domaines différentes

$x>0,\ y-x^2>0 \Rightarrow f(x,y)>0$

$x>0,\ y-x^2<0 \Rightarrow f(x,y)<0$

$x<0,\ y-x^2>0 \Rightarrow f(x,y)<0$

$x<0,\ y-x^2<0 \Rightarrow f(x,y)>0$

4. $\frac{\partial f}{\partial x} = y-3x^2 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x = 0$ $\quad \Rightarrow x=y=0$ est la seule pt. critique

$f(0,0)=0$ mais au voisinage de $(0,0)$ on a les domaines où $f>0$ et aussi $f<0$

$\Rightarrow f$ est un point selle.

5. $\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} y-3x^2\\ x\end{pmatrix}$ sur la ligne de niveau 0 prend des valeur $\begin{pmatrix} y\\ 0\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x^2-3x^2\\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x^2\\ x\end{pmatrix}$

Un vecteur est parallel au vecteur $(1,-1)$ si il est orthogonal au vecteur $(1,1)$ (car $(1,-1)\perp(1,1)$)

Donc, $\begin{pmatrix} y\\ 0\end{pmatrix}$ n'est pas parallèl au $(1,-1)$ pour aucun y.

Sur l'autre branche: $\begin{pmatrix} -2x^2\\ x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix} = -2x^2+x=0$

donne la solution $x=\frac{1}{2}$, $y=x^2=\frac{1}{4}$, le point $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ avec le gradient $\begin{pmatrix} -1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$.