Université Claude Bernard – Lyon 1

MATH IV Analyse (L2) – Examen Partiel

Mardi, 3 mai 2011.

Durée : 1 heure 30 minutes

Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I. Calculer les limites suivantes si elles existent :

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^2+xy+2y^2}$, **(b)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \ln\left(\frac{1+x+2y}{3y^2-x}\right)$.

Exercice II. Soient F et G deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et $c \in \mathbb{R}^*$. On définit la fonction

$$U(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) \quad .$$

(1) Déterminer la matrice jacobienne de U en un point $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ en fonction de F' et G'. En déduire les dérivées partielles de U par rapport à x et à t.

(2) Calculer $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ en utilisant les conclusions du premier point.

En déduire une relation entre $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

Exercice III. Soit $f(x,y) = xy - x^3$.

(1) En n'utilisant que la définition de la différentiabilité montrer que f est différentiable partout.

(2) Le graphe de la fonction f est la surface d'équation $F(x,y,z) = 0$ où

$$F(x,y,z) = xy - x^3 - z.$$

A l'aide du gradient de $F(x,y,z)$ écrire l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(2,4,0)$.

(3) Dessiner la ligne de niveau passant par le point $(0,0)$. Indiquer les signes de f dans les regions délimitées par cette courbe.

(4) Vérifier que $(0,0)$ est le seul point critique de f. Utiliser le dessin de la question (3) pour déterminer la nature exacte de ce point.

(5) Sur la ligne de niveau passant par $(0,0)$ trouver les points où le gradient de f est parallèle au vecteur $(1,-1)$.