Université Claude Bernard – Lyon 1

Math IV: ANALYSE (L2) – Examen final. 20 juin 2011. Corrigé

Exercice I.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

(1) *La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?*

(2) *Calculer le gradient de f en un point quelconque distinct de l'origine.*

(3) *La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?*

Corrigé

(1) On peut utiliser les coordonnées polaires:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^x = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{x\ln(x^2+y^2)} = \lim_{r\to 0} e^{r\cos t \ln r^2} = \lim_{r\to 0} e^{2r\cos t\ln r} = 1$$

car la fonction d'exponentielle est une fonction continue, $\cos t$ est bornée et $r\ln r \to 0$. La fonction f est alors <u>continue</u> en $(0,0)$.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x\ln(x^2+y^2))}{\partial x} = \boxed{\left(ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)^x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x\ln(x^2+y^2))}{\partial y} = \boxed{2xy(x^2+y^2)^{x-1}}$

(3) En $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+0^2)^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+2x\ln x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} 2lnx = -\infty$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{(0^2+y^2)^0-1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y^0-1}{y} = 0$. En $(0,0)$ f <u>admet</u> une dérivée partielle <u>par rapport à y</u> mais <u>pas par rapport à x.</u>

Exercice II.

Soient $g(u)$ une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $G(u)$ sa primitive et $A = (0, \pi/2)$ et $B = (\pi/2, 0)$ deux points dans le plan $\mathbb{R}^2$. Soit $\alpha(x,y) = g(\sin x + \cos y)\cos x \ \mathrm{d}x - g(\sin x + \cos y)\sin y \ \mathrm{d}y$ une 1-forme différentielle.

(1) *Calculer $\mathrm{d}\alpha$.*

(2) *Montrer que $\alpha(x,y)$ est exacte et trouver toutes les fonctions $h(x,y)$ dont la différentielle donne $\alpha(x,y)$.*

(3) *Démontrer que l'intégrale curviligne $\int_A^B \alpha$ ne depend pas du choix de chemin reliant A et B.*

(4) *Calculer cette intégrale pour $g(u) = \dfrac{1}{|u|+1}$.*

Corrigé

(1) Comme $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0$, α est une forme fermée:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha = & \ \frac{\partial(g(\sin x+\cos y)\cos x)}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x - \frac{(g(\sin x+\cos y)\sin y)}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ = & \ -\sin y\ g'(\sin x+\cos y)\cos x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x - \cos x\ g'(\sin x+\cos y)\sin x\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \boxed{0} \end{aligned}$$

(2) Par le théorème de Poincaré une forme fermée est exacte sur un domaine simplement connexe (ici $\mathbb{R}^2$). Pour trouver $h(x,y)$ dont la différentielle donne $\alpha(x,y)$ il faut resoudre le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = & g(\sin x+\cos y)\cos x \\ \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = & -g(\sin x+\cos y)\sin y \end{cases}, \quad \text{la solution est } h(x,y) = \boxed{G(x,y)+c} \quad \text{où } c \in R.$$

(3) Nous avons une intégrale d'une forme différentielle exacte sur un domaine simplement connexe. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ - un chemin alant de A à B. Soit sa paramétrization $\gamma : [a,b] \to \Gamma, (x,y) = \gamma(t)$ tel que $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$. L'intégrale ne depend pas du choix de chemin reliant A et B car $\int_A^B \alpha = \int_A^B dh = \int_a^b dh(\gamma(t)) = h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)) = h(B) - h(A)$ et que $\int_a^b dh(\gamma(t))$ est une intégrale simple d'une variable. Pour le calculer on utilise la formule de Newton-Leibniz (formule de Stokes en dimension 1).

(4) La primitive de $g(u) = \dfrac{1}{|u|+1}$ est $G(u) = \ln(|u|+1)$, $h(x,y) = \ln(|\sin x + \cos y| + 1) + c$. Par conséquent l'intégrale est égale à

$$[h(\sin x + \cos y + 1)]_A^B = \ln(\sin\pi/2 + \cos 0 + 1) - \ln(\sin 0 + \cos\pi/2 + 1) = \boxed{\ln 3}$$

Exercice III.

On considère l'intégrale $I_a = \iint_{\Omega_a} (x^2 - y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ *sur le domaine* $\Omega_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + y^2 \leq 1 \right\}$, $a > 0$

(1) *D'abord on fait l'étude du domaine* Ω_a. *Soit* Γ_a *la courbe définie par l'équation* $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$.

(a) *Dessiner* Γ_a, *pour* $a = 3$, $a = 1$ *et* $a = \dfrac{1}{2}$. *Quelle est la nature de cette courbe ?*

(b) *Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe* Γ_3 *en un point* $(x_0, y_0) \in \Gamma_3$, *en supposant* $x_0 > 0$ *et* $y_0 > 0$.

(c) *Utiliser le théorème de Green-Riemann pour le calcul de l'aire du domaine entouré par* Γ_a *à l'aide d'une intégrale curviligne.*

(2) *Calculer* I_a *en suivant les étapes suivantes :*

(a) *Soit* $\Omega_a \to \Omega' : (x, y) \to (u, v)$, *où* $u = x/a, v = y$. *Décrire le domaine* Ω'. *Reécrire l'intégrale* I_a *en fonction d'une intégrale par rapport aux variables* u *et* v *sur* Ω'.

(b) *Calculer* $J = \iint_{\Omega'} (u^2 + v^2)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ *par le passage en coordonnées polaires. En déduire les valeurs des intégrales* $K = \iint_{\Omega'} u^2\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$, $L = \iint_{\Omega'} v^2\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$.

(c) *Exprimer l'intégrale* I_a *en fonction de* J *et la trouver.*

Corrigé

(1)(a) Γ_3 est une ellipse avec y qui varie entre -1 et 1 et x entre -3 et 3. Γ_1 est le cercle unité. $\Gamma_{1/2}$ est une ellipse avec y varie entre -1 et 1 et x entre $-1/2$ et $1/2$.

(1)(b) La droite tangente à la courbe Γ_3 en un point $(x_0, y_0) \in \Gamma_3$, en supposant $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ peut être trouvée de façons différentes:

i. Simplement en trouvant la pente de la courbe $y = \sqrt{1 - (x/3)^2}$, qui est une équation d'ellipse de partie $y > 0$. On trouve $y' = -\frac{2x}{9} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-(x/3)^2}} = -\frac{x}{9} \frac{1}{y}$ et par consequent $\boxed{y - y_0 = -\dfrac{x_0}{9y_0}(x - x_0)}$

ii. Une paramétrisation de Γ_a donne $x = 3\cos t$, $y = \sin t (t \in [0, \pi/2])$ avec t_0 la valeur de t tel que $x_0 = 3\cos t_0$ et $y_0 = \sin t_0$. La droite tangente à la courbe C en ce point (x_0, y_0) est une droite parallèle à la direction du vecteur tangent $\{ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \vec{i} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \vec{j} \}\Big|_{t=t_0}$. Par conséquent, son équation est $\dfrac{x - x_0}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} = \dfrac{y - y_0}{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}$ où $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} = -3\sin t_0 = -3y_0$; $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} = \cos t_0 = \dfrac{1}{3}x_0$.

La droite tangente a pour équation : $\boxed{-\dfrac{1}{3}\dfrac{x - x_0}{y_0} = 3\dfrac{y - y_0}{x_0}}$

iii. Encore une autre façon de trouver l'équation de la droite tangente à une courbe se base sur le fait que le gradient de la fonction qui donne Γ_3 comme une courbe de niveau 1 est perpendiculaire à la direction de la tangente (la courbe est définie par une relation $F(x, y) = 1$ où $F(x, y) = \dfrac{x^2}{3^2} + y^2$).

Donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x_0, y_0) = \partial F/\partial x\ \vec{i} + \partial F/\partial y\ \vec{j}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \dfrac{2}{3^2}x_0\ \vec{i} + 2y_0\ \vec{j}$.

Soit (x, y) un point de la droite tangent. Le vecteur $(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$ est perpendiculair au $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x_0, y_0)$ si et seulement si leur produit scalaire est 0 ce qui donne l'équation de la droite tangente: $\Big((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}\Big)\left(\frac{2}{3^2}x_0\ \vec{i} + 2y_0\ \vec{j}\right) = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{\dfrac{2}{9}(x - x_0)x_0 + 2(y - y_0)y_0 = 0}$

(1)(c) Le théorème de Green-Riemann implique : $\mathrm{Aire}(\Omega_a) = \int_{\Omega_a} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \oint_{\Gamma_a} x\, \mathrm{d}y$. La courbe Γ_a dans la forme paramétrique peut être présentée comme $x = a\cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi[$ par consequent $\mathrm{d}y = \cos t\, \mathrm{d}t$. Donc, $\mathrm{Aire}(\Omega_a) = \int_0^{2\pi} a\cos t \cos t\, \mathrm{d}t = a\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, \mathrm{d}t = \boxed{\pi a}$

(2)(a) Le domaine Ω_a défini par $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 \leq 1$ devient $u^2 + v^2 \leq 1$, le disque unité Ω'. La forme différentielle $\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = a\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ et l'intégrale $I_a = a\iint_{\Omega'} ((au)^2 - v^2)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = a^3 \iint_{\Omega'} u^2\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v - a\iint_{\Omega'} v^2\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ **(2)(b)** L'intégrale $J = \iint_{\Omega'} (u^2 + v^2)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$. Le Jacobien ici est r. Les intégrales K et L sont égales (u et v sont des variables muettes et interchangeables.) Comme $K + L = J$ on a $K = L = J/2$.

(2)(c) L'intégrale $I_a = a^3 K - aL = (a^3 - a)J/2 = \boxed{\dfrac{(a^3 - a)\pi}{4}}$.