Université Claude Bernard – Lyon 1

Math IV: ANALYSE (L2) – Examen final

Lundi, 20 juin 2011

Durée : 2 heures

Calculatrices, téléphones portables et tous documents interdits

Exercice I.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

(1) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

(2) Calculer le gradient de f en un point quelconque distinct de l'origine.

(3) La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?

Exercice II.

Soient $g(u)$ une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $G(u)$ sa primitive et $A = (0, \pi/2)$ et $B = (\pi/2, 0)$ deux points dans le plan $\mathbb{R}^2$. Soit

$$\alpha(x,y) = g(\sin x + \cos y)\cos x \ \mathrm{d}x - g(\sin x + \cos y)\sin y \ \mathrm{d}y$$

une 1-forme différentielle.

(1) Calculer $\mathrm{d}\alpha$.

(2) Montrer que $\alpha(x,y)$ est exacte et trouver toutes les fonctions $h(x,y)$ dont la différentielle donne $\alpha(x,y)$.

(3) Démontrer que l'intégrale curviligne $\int_A^B \alpha$ ne depend pas du choix de chemin reliant A et B.

(4) Calculer cette intégrale pour $g(u) = \dfrac{1}{|u|+1}$.

Exercice III.

On considère l'intégrale

$$I_a = \iint_{\Omega_a} (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

sur le domaine

$$\Omega_a = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + y^2 \leq 1 \right\}, \ a > 0$$

(1) D'abord on fait l'étude du domaine Ω_a. Soit Γ_a la courbe définie par l'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$.

(a) Dessiner Γ_a, pour $a = 3,\ a = 1$ et $a = \dfrac{1}{2}$. Quelle est la nature de cette courbe ?

(b) Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe Γ_3 en un point $(x_0, y_0) \in \Gamma_3$, en supposant $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

(c) Utiliser le théorème de Green-Riemann pour le calcul de l'aire du domaine entouré par Γ_a à l'aide d'une intégrale curviligne.

(2) Calculer I_a en suivant les étapes suivantes :

(a) Soit $\Omega_a \to \Omega' : (x,y) \to (u,v),$ où $u = x/a,\ v = y$. Décrire le domaine Ω'. Reécrire l'intégrale I_a en fonction d'une intégrale par rapport aux variables u et v sur Ω'.

(b) Calculer

$$J = \iint_{\Omega'} (u^2 + v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

par le passage en coordonnées polaires. En déduire les valeurs des intégrales

$$K = \iint_{\Omega'} u^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad L = \iint_{\Omega'} v^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

(c) Exprimer l'intégrale I_a en fonction de J et la trouver.