Math IV : Analyse (version du 09/06/2011) [1]

Page-web du cours : http ://math.univ-lyon1.fr/∼okra/2011-MathIV/
responsable de UE : Olga Kravchenko, bât Braconnier, 102 bis, 04 72 43 27 89, okra@math.univ-lyon1.fr

Table des matières

1. Remerciements aux étudiants de 2ème année en math-info lors du printemps difficile des grèves 2009 pour des corrections et surtout à Yoann Potiron, pour m'avoir convaincue d'écrire ce cours ! Merci aussi à mes collègues Tuna Altinel, Damien Gayet et Jérôme Germoni pour leurs remarques pertinentes. Et enfin, ce texte a été soigneusement relu par Emmanuelle Curatolo, étudiante du cours math-IV analyse en 2010-2011. Je n'aurai sûrement pas fini ce texte sans ses corrections et des discussions avec elle. Je lui suis sincèrement reconnaissante.

1. Chapitre I. Topologie d'un espace vectoriel réel

1.1. **Espaces métriques, définition de la distance.**

On note $\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{p \text{ fois}} = \{X = (x_1, \cdot, x_p) |\ x_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in [1, \cdots, p]\}$ - espace vectoriel réel de dimension p.

On s'intéresse aux fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Il faut d'abord étudier la structure du domaine D car le domaine est aussi important que la fonction. Pour cela on va définir une notion de distance.

Définition 1. Soit E un ensemble non-vide. On dit qu'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+,\ d : (x, y) \mapsto d(x, y)$ est une distance sur E si elle vérifie les trois axiomes suivants :

D1 (séparation) $\forall (x, y) \in E \times E,\ \{x = y\} \Leftrightarrow \{d(x, y) = 0\}$;

D2 (symétrie) $\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = d(y, x)$;

D3 (inégalité triangulaire) $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Définition 2. On appelle espace métrique tout couple (E, d) où $E \neq \emptyset$ est un espace vectoriel et d est une distance.

Exemple 3. (1) $E = \mathbb{R},\ d(x, y) = |x - y|$

(2) $E = \mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction concave définie $\forall x \geq 0$, et t.q. $\{f(x) = 0\} \Leftrightarrow \{x = 0\}$. Alors $d(x,y) = f(|x-y|)$ est une distance. En effet, les propriétés D1 et D2 sont évidentes et D3 suit de la condition de concavité.

Une fonction est concave sur un intervalle I si $x_0, x_1, x_2, x_3 \in I$ et $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ alors, $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \geq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. (Géométriquement, c'est une remarque sur la relation entre les pentes de deux droites qui lient les points de coordonnées $(x_0, f(x_0)$ et $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2)$ et $(x_3, f(x_3))$. Faites un dessin !). Donc si on prend $x_0 = 0, x_1 = a, x_2 = b, x_3 = a+b$ on a $\frac{f(a)-f(0)}{a-0} \geq \frac{f(a+b)-f(b)}{a+b-b}$. Mais $f(0) = 0$ alors, si $0 < a < b$ on a $f(a) \geq f(a+b) - f(b)$ et donc $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.

On a beaucoup d'exemples de distances différentes sur $\mathbb{R}$. En particulier, $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ ou $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|.}$ Le dernier exemple définit une distance sur $\mathbb{R}$ qui, pour tout point, est inférieure à 1.

(3) Métriques sur $E = \mathbb{R}^p$, soit $X = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $Y = (y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. On a $d_2(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^p |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$ (métrique euclidienne),
ou $d_1(X,Y) = \sum_{i=1}^p |x_i - y_i|$,
ou $d_\infty(X,Y) = \sup_{i=[1,\cdots,p]} |x_i - y_i|$

(4) Soit E un ensemble quelconque. Pour $x, y \in E$ on définit $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Remarque : dans cet exemple (E, d) n'est pas un espace métrique.

1.2. **Boules ouvertes, fermées. Sphères. Parties bornées.**

Définition 4. Soit a un point de $\mathbb{R}^p$ et $r > 0$ un nombre réel.

(1) $\overline{B}(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(a,x) \leq r\}$ est appelée boule fermée de centre a et de rayon r.

(2) Une boule ouverte de centre a et de rayon r est $B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^p | \ d(a,x) < r\}$

(3) Une sphère de centre a et de rayon r est $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p | \ d(a,x) = r\}$

On obtient des boules de formes différentes pour des espaces métriques différents. Pour le voir je recommande vivement de dessiner des boules unité dans $\mathbb{R}^2$ pour les distances d_1, d_2 et d_∞.

Définition 5. Une partie bornée P de $\mathbb{R}^p$ est une partie de $\mathbb{R}^p$ pour laquelle on peut trouver une boule (ouverte ou fermée) qui contient tous les points de P.

1.3. **Ouverts et Fermés.**

Définition 6. Une partie ouverte (ou un ouvert) de $\mathbb{R}^p$ est une partie U t.q. $\forall u \in U$, $\exists r > 0$ tel que $B(u,r) \subset U$ *ie* tout point de U est le centre d'une boule ouverte, de rayon non-nul, incluse dans U.

Une partie fermée (ou un fermé) de $\mathbb{R}^p$ est une partie telle que son complémentaire U dans $\mathbb{R}^p$ est un ouvert.

Remarque 7. E et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

Proposition 8. Dans un espace métrique (E,d), (1) une boule ouverte est un ouvert, et (2) une boule fermée est un fermé.

Démonstration. (1) Soit $y \in B(a,r)$. Alors choisissons $\epsilon > 0$ t.q. $d(a,y) < r-\epsilon$ (un tel ϵ existe, car $d(a,y)$ est strictement plus petit que r). Pour tout $z \in B(y,\epsilon)$, montrons que $z \in B(a,r)$, cela veut dire qu'autour de chaque point y de $B(a,r)$ il existe une boule ouverte entièrement contenue dans $B(a,r)$.
Par inégalité triangulaire $d(a,z) \leq d(a,y) + d(z,y) \Rightarrow d(a,z) < r-\epsilon+\epsilon = r$. Donc $z \in B(a,r)$, i.e. chaque point de $B(y,\epsilon)$ appartient à $B(a,r)$ et $B(y,\epsilon) \subset B(a,r)$.

(2) Soit $\complement\overline{B}(a,r)$ le complémentaire de $\overline{B}(a,r)$. Il faut montrer que $\complement\overline{B}(a,r)$ est un ouvert. Soit $y \in \complement\overline{B}(a,r)$. Montrons qu'il existe une boule contenant y entièrement contenue dans $\complement\overline{B}(a,r)$.
Puisque y est en dehors de $\overline{B}(a,r)$, $d(a,y) > r$. Soit $\epsilon = d(a,y) - r > 0$.
Pour tout $z \in B(y,\epsilon)$ montrons que $z \in \complement\overline{B}(a,r)$. En effet, par inégalité triangulaire $d(a,z) + d(z,y) \geq d(a,y) = r+\epsilon$. Donc $d(a,z) \geq r+\epsilon-d(z,y)$. Puisque $z \in B(y,\epsilon)$ on a $\epsilon > d(z,y)$ donc $d(a,z) > r+\epsilon-d(z,y) > r+\epsilon-\epsilon = r \Rightarrow z \in \complement\overline{B}(a,r)$. Donc $\overline{B}(a,r)$ est un complément d'un ouvert, c'est donc un fermé. $\square$

Définition 9. Soit E un ensemble non-vide et $P(E)$ l'ensemble de ses parties. On appelle topologie induite par distance (ou topologie tout court) l'ensemble des ouverts $\mathcal{T} \subset P(E)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) E et $\emptyset$ sont des éléments de $\mathcal{T}$
(2) Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$
(3) Toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$.

Définition 10. Position d'un point par rapport à une partie de $\mathbb{R}^p$.
Soit $A \subset \mathbb{R}^p$.

(1) On dit que a est intérieur à A si on peut trouver un ouvert $U \in \mathbb{R}^p$ t.q. $a \in U$ et $U \subset A$. L'intérieur de A, noté $\overset{o}{A}$, est le plus grand ouvert inclus dans A.
(2) On dit que a est un point frontière de A si tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ contenant a rencontre à la fois A et le complémentaire de A.
(3) On dit que a est adhérent à A si tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ contenant a rencontre A.
(4) L'adhérence de A, notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé qui contient A.

Définition 11. On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}^p$ est un voisinage de $x \in \mathbb{R}^p$ si V contient un ouvert contenant x.

Exercice. Démontrer l'équivalence avec la définition suivante : On dit que $V \subset \mathbb{R}^p$ est un voisinage de x ssi $\exists\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset V$.

1.4. Normes des espaces vectoriels.

Définition 12. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui à $x \mapsto \| x \| \in \mathbb{R}_+$, et vérifie
N1 (séparation) $\forall x \in E, \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
N2 (homogénéité positive) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$
N3 (inégalité triangulaire) $\forall x,y \in E, \| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$.
Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme est appellé espace vectoriel normé (e.v.n.).

Proposition 13. Soit E un e.v.n. L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ qui au couple (x,y) associe $d(x,y) := \| x-y \|$ est une distance sur E.

On l'appelle distance induite sur E par la norme. Elle possède les propriétés suivantes :
– $\forall x \in E,\ d(0,x) = \| x \|$
– $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in E^2,\ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$

– $\forall(x,y,z) \in E\times E\times E,\ d(x+z,y+z) = d(x,y)$.

Remarque 14. Toute norme induit une distance, par contre toutes les distances ne proviennent pas d'une norme. La distance (4) de l'exemple 3 n'est induite par aucune norme (quelle propriétée de la norme n'est pas forcément satisfaite ?).

Exemple de normes sur $\mathbb{R}^p$. Soit $x \in \mathbb{R}^p,\ X = (x_1, \cdots, x_p),\ x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in [1, \cdots, p]$. Alors

$$\begin{aligned} \| X \|_1 &= \textstyle\sum_1^p |x_i| \text{ (norme de Manhattan)} \\ \| X \|_2 &= \left(\textstyle\sum_1^p |x_i|^2\right)^{1/2} \text{ (norme euclidienne)} \\ \| X \|_n &= \left(\textstyle\sum_1^p |x_i|^n\right)^{1/n} \\ \| X \|_\infty &= \max_{1\le i\le p}|x_i| \end{aligned}$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^p$.

Définition 15. Normes équivalentes. Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes s'il existe deux constantes $\lambda > 0, \mu > 0$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^p, \lambda\|X\| \le \|X\|' \le \mu\|X\|$. On note $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.

Proposition 16. Cette définition induit une relation d'équivalence.

Démonstration.
– **reflexivité** : $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$
– **symétrie** : si $\lambda\|X\| \le \|X\|' \le \mu\|X\|$ alors $\frac{1}{\mu}\|X\|' \le \|X\| \le \frac{1}{\lambda}\|X\|'$.
– **transitivité** : $\lambda\|X\| \le \|X\|' \le \mu\|X\|$ et $\beta\|X\|' \le \|X\|'' \le \gamma\|X\|'$ implique $\beta\lambda\|X\| \le \|X\|'' \le \gamma\mu\|X\|$.

□

Exemple 17. Les normes $\| X\|_2 = \left(\sum_1^p |x_i|^2\right)^{1/2}$ et $\| X \|_\infty = \max_{1\le i\le p}|x_i|$ sont équivalentes. En effet, on a $\|X\|_2 \le (p\cdot\|X\|_\infty^2)^{1/2} = \sqrt{p}\|X\|_\infty$. Soit $k \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $x_k = \max\{x_1, \cdots, x_p\} = \|X\|_\infty$, alors $\|X\|_\infty = (x_k^2)^{1/2} \le \left(\sum_1^p |x_i|^2\right)^{1/2} = \|X\|_2$. Donc $\frac{1}{\sqrt{p}}\|X\|_2 \le \|X\|_\infty \le \|X\|_2$.

Exercice.
1. Montrer que toutes les normes $\|\cdot\|_n, n \in [1, +\infty]$ sont équivalentes.
2. Si $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ t.q. $\lambda\|X\| \le \|X\|' \le \frac{1}{\lambda}\|X\|$ et $\lambda\|X\|' \le \|X\| \le \frac{1}{\lambda}\|X\|'$.

Théorème 18. *Deux normes équivalentes induisent la même topologie.*

Ie si les normes sont équivalentes on trouve que deux ensembles

$$\mathcal{T} = \{U \in P(\mathbb{R}^p), U \text{ ouvert pour la norme } \|\cdot\|\}$$

et $\mathcal{T}' = \{U \in P(\mathbb{R}^p),\ U$ ouvert pour la norme $\|\cdot\|'\}$, sont égaux : $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Démonstration. Soit U un élément de $\mathcal{T}$, il faut montrer que c'est aussi un élément de $\mathcal{T}'$.
Cela se traduit :

Soit U un ouvert pour la norme $\|\cdot\| \Leftrightarrow \forall X \in U,\ \exists\varepsilon > 0$ tel que $B(X,\varepsilon) \subset U$. On va m.q. U est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|'$. Pour tout $X \in U$ il faut montrer qu'il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $B'(X,\varepsilon')$, une boule pour la norme $\|\cdot\|'$ est un sous-ensemble de U. Pour cela on va trouver ε' tel que tout point Y de $B'(X,\varepsilon')$ appartienne aussi à $B(X,\varepsilon)$ et donc à U. Par équivalence des normes $\exists\lambda > 0$ tel que $\forall Z \in \mathbb{R}^p\|Z\| \le \lambda\|Z\|'$. Soit $Y \in B'(X, \frac{\varepsilon}{\lambda})$ on a $\|X-Y\| \le \lambda\|X-Y\|' < \lambda\dfrac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$ donc $B'(X, \dfrac{\varepsilon}{\lambda}) \subset U$. Donc si U est un ouvert pour $\|\cdot\|$, alors pour tout $X \in U$, il existe $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\lambda} > 0$ tel que $B'(X,\varepsilon') \subset U$. Donc U est un élément de $\mathcal{T}'$.

De la même manière on montre que si U est un élément de $\mathcal{T}'$, c'est aussi un élément de $\mathcal{T}$. □

Théorème 19. *(Admis.) Sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 20. *On parle de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^p$ sans préciser la norme.*

Dans la suite, on notera $||.||$ sans préciser de quelle norme il s'agit.

2. Chapitre II. Fonctions de plusieurs variables.

2.1. **Fonctions de plusieurs variables. Graphes. Lignes de niveau.** On s'intéresse maintenant aux fonctions $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. On distingue des fonctions scalaires : $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et des fonctions vectorielles : $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, q > 1$.

On va commencer par l'étude des fonctions de deux variables. Une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles fait correspondre à tout point $X = (x, y)$ de D, (appelé le domaine de définition de F) un réel unique $f(X)$.

Définition 21. Soit $f: D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$.

(1) L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}.$$
est appelé la surface représentative de f. S est aussi appelé le graphe de la fonction f.

(2) Soit $A = (a, b)$ un point intérieur de D. Les fonctions $x \mapsto f(x, b)$ et $y \mapsto f(a, y)$ définies sur des intervalles ouverts, contenant respectivement b et a sont appelées les fonctions partielles associées à f au point A.

(3) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble $L_k = \{(x, y) \in D \text{ tel que } f(x, y) = k\}$ est la ligne de niveau k de la fonction f.

Remarque 22. Pour les fonctions de trois variables, la notion analogue à la ligne de niveau est celle de surface de niveau (Formulez-là !)

Les lignes de niveau et les fonctions partielles sont utiles pour dessiner les graphes des fonctions.

Exemple 23. A. $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ sur $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$. On calcule et représente des lignes de niveau $k = 0, k = 1, k = 2, k = 4, k = -1$. Pour $k = 0$ c'est un seul point $(0, 0)$, avec la valeur de la fonction 0, pour $k = 1, 2, 4$ on obtient des ellipses. Par exemple aux points de l'ellipse $4x^2 + y^2 = 1$ la fonction a la valeur 1, etc. La ligne de niveau $k = -1$ est l'ensemble vide (la fonction ne prend la valeur -1 en aucun point). Au point $(0, 0)$ les fonctions partielles sont $x \mapsto 4x^2$ et $y \mapsto y^2$.
B. Sur $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$ et $x \neq 0$ on considère la fonction $f(x, y) = y/x$ avec ses lignes de niveau $k = 0, 1, -1, 2, -2$. Ce sont des intervalles des droites $y = 0,\ y = x,\ y = -x,\ y = 2x,\ y = -2x$ sans le point $x = y = 0$. La valeur de la fonction sur la droite $y = x$ est égale à 1, sur $y = -x$ est égale à -1, etc.

2.2. **Notion de limite.** Une fois qu'on a les normes et les voisinages, la définition de limite est la même que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Définition 24. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ et $A \in \mathbb{R}^p$. On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = A$ ssi $\forall V$ voisinage de A, $\exists N_V \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_V \Rightarrow X_n \in V$. C'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|X_n - A\| \leq \varepsilon$.

Lien avec les limites dans $\mathbb{R}$:

Propriété 25. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((x_{n_1}, \ldots, x_{n_p})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^p$ et $A = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = A$ ssi $\forall i = 1, \ldots, p,\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n_i} = a_i$.

Définition 26. Soit $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. On dit que f a une limite $L \in \mathbb{R}^q$ en A ssi $\forall (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de D telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = A$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(X_n) = L$.

Il y a une autre définition de la limite d'une fonction utilisant $\varepsilon - \delta$ qui est équivalente à la définition 26.

Définition 27. Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$ et A un point adhérent à D, L un point de $\mathbb{R}^q$. On dit que f a pour limite L lorsque $X \to A$ si : $(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\ ; \|X - A\| \le \eta, X \in D) \Longrightarrow (\|f(X) - L\| \le \varepsilon)$.

Remarque 28.

(1) La notion de limite ne dépend pas des normes utilisées (pourquoi ?).

(2) La limite, si elle existe, est unique (trivial mais très important).

(3) La limite partielle : soit $D_1 \subset D$ un sous-ensemble et A un point adhérent à D_1. Si $f(X)$ tend vers L lorsque X tend vers A en restant dans D, alors $f(X)$ tend vers la même limite L si X tend vers A en restant dans D_1. En particulier, si on regarde le comportement des fonctions partielles au même point, elles doivent toutes avoir la même limite (si elle existe, bien sûr).

Nous avons les propriétés suivantes des limites de fonctions :

Proposition 29. Soient f et g des fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}^q$, $X \in D$ et A un point adhérent à D.

(1) $\lim_{X \to A} (f(X) \pm g(X)) = \lim_{X \to A} f(X) \pm \lim_{X \to A} g(X)$

(2) $\lim_{X \to A} f(X)g(X) = \lim_{X \to A} f(X) \cdot \lim_{X \to A} g(X)$

(3) Pour les fonctions à valeurs réelles (i.e. $q = 1$) si $\lim_{X \to A} f(X) \neq 0$ on a
$$\lim_{X \to A} \frac{1}{f(X)} = \frac{1}{\lim_{X \to A} f(X)}.$$

(4) Composition. Soient les fonctions $g_i : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $i = 1, \cdots, p$ et B un point adhérent à E et $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, si $\lim_{Y \to B} g_i(Y) = a_i$, $A = (a_1, \cdots, a_p)$ un point adhérent à D alors
$$\lim_{Y \to B} f(g_1(Y), \cdots, g_p(Y)) = \lim_{X \to A} f(X).$$

(5) Majoration. Si $\lim_{X \to A} g(A) = 0$ et $\|f(X) - C\| \le g(X), C \in \mathbb{R}^q$ pour tout X au voisinage de A, alors $\lim_{X \to A} f(X) = C$.

La preuve de cette proposition répète la preuve d'une proposition analogue pour des fonctions d'une variable - il faut juste utiliser des normes à la place des valeurs absolues.

2.3. Continuité.

Définition 30. Une fonction f est continue en un point $A \in D$ si la limite de f en ce point existe et est égale à la valeur de la fonction en A.

La fonction est continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Ou bien on peut reformuler cette définition à l'aide des suites :

Définition 31. Soit $f :\ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. On dit que f est continue en A ssi $\forall\, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de D telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = A$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(X_n) = f(A)$.

Propriété 32. Opérations sur les fonctions continues : suite à la Proposition 29 la somme, le produit et le quotient (là où le dénominateur ne s'annule pas) des fonctions continues sont continus. La composée de fonctions continues est continue.

Remarque 33. Toute fonction obtenue à l'aide de fonctions continues élémentaires de variables $(x_1, \cdots, x_p)$ en utilisant les opérations algébriques et la composition est continue dans son domaine naturel de définition. Exemples : des polynômes $x^k y^n$, exponentielles e^{2x+xy}, trigonométriques $\sin(xy)$ etc sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Attention : $\dfrac{1}{x^n y^m}, n, m > 0$ n'est pas un polynôme (et n'en a jamais été un).

Il peut être pratique de fixer toutes les composantes sauf une :

Définition 34. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Soit $X_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^p) \in D$. Pour $i = 1 \ldots, p$, on appelle <u>i-ème fonction partielle</u> de f en X_0 la fonction :

$$f_{X_0,i} : \begin{cases} D_i \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q \\ x \mapsto f(x_0^1, \ldots, x_0^{i-1}, x, x_0^{i+1}, \ldots, x_0^p) \end{cases}$$

où x est à la i-ème place, et D_i est tel que pour $x \in D_i$, $(x_0^1, \ldots, x, \ldots, x_0^p) \in D$.

Proposition 35. Si f est continue en $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^p)$ alors $\forall i = 1 \ldots, p$, la fonction partielle $f_{x_0,i}$ est continue en x_0^i.

Remarque 36. La réciproque est fausse !

Exemple 37. On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ses 2 fonctions partielles en $(0, 0)$ sont

$$f_{(0,0),1} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x \cdot 0}{x^2 + 0} \text{ si } x \neq 0, \\ \\ 0 \text{ si } x = 0, \end{cases}$$

et

$$f_{(0,0),2} : y \mapsto \begin{cases} \dfrac{0 \cdot y}{0 + y^2} \text{ si } y \neq 0, \\ \\ 0 \text{ si } y = 0. \end{cases}$$

Elles sont donc <u>continues</u>. Pourtant f <u>n'est pas continue</u> en $(0, 0)$:

Soient $x_n = y_n = 1/n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, mais $f(x_n, y_n) = \dfrac{1/n^2}{2/n^2} = \dfrac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \neq 0 = f(0, 0)$.

Une autre démonstration du fait que f n'est pas continue en $(0, 0)$: prenons une restriction de f sur la droite D_1 définie par l'équation $y = x$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(f(x, y)\big|_{D_1} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{xx}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc la fonction f restreinte à un sous-ensemble D_1 de $\mathbb{R}^2$ n'a pas la même limite que la même fonction restreinte à deux autres sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$. (Les fonctions partielles $f_{(0,0),1}$ et $f_{(0,0),2}$ sont des restrictions de f aux droites $y = 0$ et $x = 0$ respectivement). Or la limite, si elle existe, doit être unique (remarque 28), donc la limite n'existe pas.

Etude de continuité des fonctions :

Exemple 38.

(1) On considère $f(x, y) = x^2 + y^2$. On va montrer que pour toutes valeurs $(x, y) = (a, b)$ la limite de $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe et est égale à la valeur au point $f(a, b) = a^2 + b^2$. Si $(x, y) \to (a, b)$ (par exemple dans une norme euclidienne) cela veut dire que $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \to 0$ donc on a :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - a \to 0 \\ y - b \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \to a \\ y \to b \end{cases}$$

Donc $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2+y^2 = a^2+b^2$, c'est exactement ce qu'on cherche a montrer, et alors la fonction est continue en chaque point.

En général on ne vérifie pas la continuité en chaque point comme dans cet exemple - aux points réguliers on utilise plutôt les propriétés des fonctions continues.

(2) Prenons un autre exemple :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 3, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

alors $f(a,b) = \dfrac{y}{x}$ pour $x \neq 0$ étant une fraction de fonctions continues est continue mais pour $x = 0$ sur les droites $y = kx$ on obtient des limites différentes quand $x \to 0$. On conclut que la fonction n'est pas continue en $(0,b)$, $\forall b \in \mathbb{R}$. Il y a une droite des points de discontinuité. Cette droite a pour équation $x = 0$.

Définition 39. Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. Soit A un point adhérent à D n'appartenant pas à D. Si f a une limite L lorsque $X \to A$ on peut étendre le domaine de définition de f à $D \bigcup \{A\}$ en posant $f(A) = L$. On dit que l'on a prolongé f par continuité au point A.

Théorème 40. *(Admis) Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue*
(2) *Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$*
(3) *Pour tout fermé F de $\mathbb{R}^q$, $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$*
(4) *Pour toute suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D \subset \mathbb{R}^p$ convergeant vers A, la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(A)$ pour tout $A \in D$.*

2.4. **Coordonnées polaires.** Notation : $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. On a une application bijective de $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ vers $\mathbb{R}^2$ donnée par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{cases} \tag{1}$$

Son application réciproque est l'application de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ suivante :

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ t &= \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{2}$$

Donc en particulier, on a $r^2 = x^2 + y^2$. Dans certains exemples d'étude de continuité des fonctions il est utile de passer aux coordonnées polaires.

Souvent c'est pratique d'utiliser les coordonnées polaires pour étudier la continuité, car la condition sur deux variables $(x,y) \to 0$ devient une condition sur une seule variable $r \to 0$.

Exemple 41.

(1) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante

$$f :\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction de fonctions continues. En $(0,0)$ on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2 t - r^2\sin^2 t}{r^2}.$$

Cette limite est égale à $\cos^2 t - \sin^2 t$. Le résultat dépend de t, i.e. il n'y a pas de limite unique, donc la limite n'existe pas et f n'est pas continue en $(0,0)$.

(2) Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$g:\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant qu'une fraction des fonctions continues. En $(0,0)$ on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\to 0} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3 t}{r^2}$$

Cette limite est égale au produit des limites : $\lim_{r\to 0}(\cos^3 t) \lim_{r\to 0} r = 0$, car $|\cos t| \leq 1$ - une fonction bornée. Finalement, la fonction g est continue en $(0,0)$ et donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2.5. **Propriétés des fonctions continues sur un compact.**

Définition 42. Une partie compacte (un compact) de $\mathbb{R}^p$ est une partie fermée et bornée.

Il existe au moins deux differentes façons de définir un compact dans un espace normé, mais dans $\mathbb{R}^p$ elles sont équivalentes à celle qu'on donne ici.

Exemple 43. Dans $\mathbb{R}$ un intervalle fermé, et dans $\mathbb{R}^p$ les boules fermées sont des exemples de compacts.

Théorème 44. *(Admis) Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une fonction* continue *sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$ et K une partie compacte de $\mathbb{R}^p$ contenue dans D. Alors, $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^q$.*

Corollaire 45. *Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.*

Cela signifie que sur un compact $K \in \mathbb{R}^p$ il existe au moins un point $X_m \in K$ et au moins un point $X_M \in K$ tels que pour tout $X \in K$ on ait

$$\|f(X_m)\| \leq \|f(X)\| \leq \|f(X_M)\|.$$

2.6. **Connexité par arc. Théorème des valeurs intermédiaires.**

Définition 46. On dit qu'une partie Γ de $\mathbb{R}^p$ est un arc continu si on peut trouver une application continue γ d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ dont l'image soit Γ. γ est appelé un paramétrage de Γ. Les points de Γ, $A = \gamma(a)$ et $B = \gamma(b)$ s'appellent les extrémités de Γ.

Attention : Γ est un objet géométrique tandis que γ, une fonction continue, est un objet analytique. Un arc continu admet une infinité de paramétrages possibles.

Définition 47. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$. On dit que E est connexe par arc si, étant donnés deux points arbitraires A et B de E on peut trouver un arc continu Γ, d'extrémités A, B entièrement contenu dans E.

Théorème 48 (des valeurs intermédiaires). *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$ connexe par arc. Soit A, B deux points de D. Pour tout nombre réel r compris entre $f(A)$ et $f(B)$ il existe un point C de D tel que $f(C) = r$.*

Démonstration. Ici on utilise le théorème des valeurs intermédiaires des fonctions d'une variable. Soit $\gamma : [a, b] \to D$ un paramétrage d'un arc continu tel que $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$. La fonction d'une variable $f \circ \gamma \ : I \to \mathbb{R}$ est continue étant une composition de fonctions continues donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b],$ tel que $f \circ \gamma(c) = r$. Soit $C = \gamma(c)$, alors $C \in D$ et $f(C) = r$. $\square$

3. Chapitre III. Calcul Différentiel

3.1. Dérivées. Matrice jacobienne. Gradient.

Rappel. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$. La dérivée de f au point $a \in I$ est :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3}$$

Soit $f : \ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. Une expression du type "$\lim_{X\to A} \frac{f(X) - f(A)}{X - A}$" n'est pas bien définie parce que diviser par $X - A$, qui est un vecteur de $\mathbb{R}^p$, n'a aucun sens ! Néanmoins, si on fixe toutes les composantes de X sauf une, on peut définir des dérivées partielles.

Définition 49. Soit $f : \ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. Pour $i = 1, \ldots, p$, on appelle dérivée partielle par rapport à x_i de f en $A = (a_1, \cdots a_p)$, et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$, ou bien $f'_{x_i}(A)$, la dérivée de la fonction partielle $f_{A,i}$ prise en a_i :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = f'_{A,i}(a_i) = \lim_{x_i\to a_i} \frac{f(a_1, \cdots, x_i, \cdots, a_p) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_p)}{x_i - a_i}.$$

Pour une fonction de deux variables $f : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en point $A = (a, b) \in D$ les dérivées partielles de $f(x, y)$ en (a, b) sont les dérivées des fonctions partielles $f(x, b)$ et $f(a, y)$ qui se calculent alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

Parfois, on les note aussi $f'_x(a, b)$ et $f'_y(a, b)$.

Exemple 50. Soit $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$. Calculer les dérivées partielles au point $(1, 2)$. En considérant y constant et en dérivant par rapport à x on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(1,2)} = (4x - 3y)\Big|_{(x,y)=(1,2)} = -2$$

En considérant x constant et en dérivant par rapport à y on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(1,2)} = (-3x + 8y)\Big|_{(x,y)=(1,2)} = 13$$

Définition 51. La matrice des dérivées partielles de $f \ : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ s'appelle la matrice jacobienne ou la Jacobienne de f.

La matrice jacobienne $Jac(f)(X_0)$ fait passer de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$: elle a p colonnes et q lignes.

$$Jac(f)(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(X_0) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(X_0) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Autrement dit, pour une fonction vectorielle $f(x_1, \cdot x_p)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ la matrice jacobienne a pour colonnes les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. En particulier, pour une fonction de p variables à valeurs réelles, la matrice jacobienne est simplement une matrice-ligne :

$$Jac(f)(x_1, \cdots, x_p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_p}\right).$$

Sa matrice transposée - la matrice-colonne :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, \cdots, x_p) = \ {}^{\dagger}\!\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_p}\right)$$

s'appelle le gradient de f.

3.2. **Propriétés des dérivées partielles.** Les dérivées partielles d'une fonction qui est obtenue par des opérations algébriques sur d'autres fonctions (somme, produit, fraction) suivent les mêmes règles.

Si une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est obtenue par des opérations algébriques (somme, produit, fraction) sur les fonctions $g, h : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, ses dérivées partielles peuvent être obtenues à partir des dérivées partielles de g et h par les formules de dérivée de somme, produit, fraction habituelles ($(u+v)' = u' + v'$, etc.)

Les dérivées partielles d'une composition de fonctions sont plus compliquées.

Rappel : règle de chaîne. Soit $g : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}, g : x \mapsto g(x),\ h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h : y \mapsto h(y)$ et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f : x \mapsto h(g(x))$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=g(x_0)} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$$

Proposition 52. Soient

$$\begin{array}{ll} g : & D \subset \mathbb{R}^p \to E \subset \mathbb{R}^m, g : X \mapsto g(X) = (g_1(X), \cdots, g_m(X)), \\ h : & E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q, h : Y \mapsto h(Y) = (h_1(Y), \cdots, h_q(Y)), \\ f : & D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, f : X \mapsto h(g(X)) = f(X) = (f_1(X), \cdots f_q(X)) \end{array}$$

des fonctions telles que g en $X_0 \in D$ et h en $g(X_0) \in E$ sont des fonctions continument dérivables (i.e. les dérivées partielles existent et sont continues) alors pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}, j \in \{1, \cdots, q\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X_0) &= \frac{\partial (h \circ g)_j}{\partial x_i}(X_0) \\ &= \frac{\partial h_j}{\partial y_1}(g(X_0))\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(X_0) + \cdots + \frac{\partial h_j}{\partial y_m}(g(X_0))\frac{\partial g_m}{\partial x_i}(X_0) \end{aligned} \tag{5}$$

ce qui nous donne les entrées d'une matrice jacobienne de f qui est un produit des matrices jacobiennes de h et g.

En particulier, si

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (y_1, y_2) \mapsto h(y_1, y_2) \text{ et } g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2,\ X \mapsto (g_1(X), g_2(X))$$

pour $f = h \circ g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial(f)}{\partial x_i}(X_0) = \frac{\partial(h \circ g)}{\partial x_i}(X_0) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(g(X_0))\frac{\partial(g_1)}{\partial x_i}(X_0) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(g(X_0))\frac{\partial(g_2)}{\partial x_i}(X_0)$$

Exemple 53. (1) Soit $f(x) = e^x \sin^2 x$. On peut voir f comme une composition de deux fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, g(x) = (e^x, \sin x)$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(y_1, y_2) = y_1 \cdot (y_2)^2$.

On a deux façons de calculer la dérivée de f - directement ou en utilisant la Proposition (52) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\partial(y_1 \cdot (y_2)^2)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial(y_1)}{\partial x} + \frac{\partial(y_1 \cdot (y_2)^2)}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial(y_2)}{\partial x} \\ &= (y_2)^2 e^x + 2y_1 y_2 \cos x = \sin^2 x \cdot e^x + 2e^x \sin x \cos x. \end{aligned}$$

(2) On peut aussi résoudre des problèmes comme celui-là :

Soient $f(x) = F(x, \phi(x)) = 0$, où $f(x)$ et $\phi(x)$ sont des fonctions d'une variable et $F(y_1, y_2)$ est une fonction de deux variables. Calculer $\phi'(x)$ en fonction des dérivées de F.

On considère $f(x)$ en tant qu'une fonction composée :

$$f'(x) = \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x} = F_1'(x, \phi(x)) + F_2'(x, \phi(x))\phi'(x) = 0.$$

D'où $\phi'(x) = -\dfrac{F_1'}{F_2'}(x, \phi(x))$.

3.3. **Derivées partielles d'ordre supérieur. Fonctions de classe C^k. Théorème de Schwarz.** Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Les dérivées partielles définissent p nouvelles fonctions

$$f'_{x_i}(x_1, \cdots, x_p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_p).$$

On peut regarder les dérivées partielles de chacune de ces nouvelles fonctions. Cela nous donne les dérivées partielles d'ordre 2 (aussi appellées les dérivées partielles secondes) et à leur tour on peut regarder les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre 2, etc. Cela s'écrit par exemple :

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

Définition 54. Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^k est une fonction dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues. Une fonction est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 55. ***(Schwarz)*** *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur D. Les fonctions de dérivées partielles d'ordre 2, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ sont égales en tout point de D.*

Remarque 56. Le théorème de Schwarz implique que les dérivées partielles d'ordre $k,\ k \geq 2$, d'une fonction de classe $C^k,\ f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les dérivées partielles sont prises. Par exemple, pour une fonction de deux variables $f(x, y)$ de classe C^3, on a : $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

3.4. **Différentielle.** (Chapitre 2 de [2].)

Lors de l'équation (3), en essayant de généraliser l'expression pour la dérivée d'une fonction d'une variable aux fonctions de plusieurs variables, nous avons introduit les fonctions de dérivées partielles, qui sont utiles et révèlent certaines informations sur le comportement de la fonction mais n'apportent pas toute l'information.

Exemple 57. On considère à nouveau l'exemple 37. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$f:\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On calcule sa dérivée partielle par rapport à x :

– $\forall (x_0, y_0) \neq (0,0),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(\dfrac{x y_0}{x^2 + y_0^2} \right)' \Bigg|_{x=x_0} = \dfrac{y_0^3 - x^2 y_0}{(x^2+y_0^2)^2}\Bigg|_{x=x_0} = \dfrac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$.

– $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est la dérivée de $x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0, \end{cases}$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0.$

On voit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe, de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0, et pourtant f n'est même pas continue en $(0,0)$. Donc les dérivées partielles ne suffisent pas à décrire la régularité de la fonction.

Nous allons réécrire l'équation (3) sans division et la généraliser aux fonctions de plusieurs variables.

Définition 58. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q,\ A \in D$. La <u>différentielle</u> $\mathrm{d}f(A)$ de f au point A est <u>une application linéaire</u> de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que au voisinage de A on a :

$$f(A+H) - f(A) = (\,\mathrm{d}f(A))\,(H) + r(H), \text{ où } r(H) = o(\|H\|). \tag{6}$$

Ici, $H \in \mathbb{R}^p$, tel que $A+H$ est au voisinage de A. La fonction f est dite <u>différentiable au point A</u> si elle possède une différentielle en ce point. La fonction f est dite <u>différentiable</u> dans un domaine D si elle est différentiable en tout point de D.

Cette application agit sur les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et les envoie vers $\mathbb{R}^q$, en particulier $(\,\mathrm{d}f(A))(H) \in \mathbb{R}^q$. Le reste, $r(H) = o(\|H\|)$, dit "petit o" de $\|H\|$, est une fonction $r : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, négligeable devant $\|H\|$. On peut comparer leurs normes :

$$\lim_{\|H\| \to 0} \frac{\|r(H)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|H\|_{\mathbb{R}^p}} = 0.$$

On peut réécrire la condition de différentiablité

$$\lim_{\|H\| \to 0} \frac{f(A+H) - f(A) - (\,\mathrm{d}f(A))\,(H)}{\|H\|} = 0$$

Si elle existe, la différentielle $\mathrm{d}f(A)$ est <u>unique</u>. On la note selon les auteurs ou les circonstances :

$$L = Df(A) \text{ ou } \mathrm{d}f(A) \text{ ou } D_A f \text{ ou } \mathrm{d}_A f.$$

La différentielle $\mathrm{d}f(A)$, si elle existe, est donnée par une matrice de taille $p \times q$ (une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$ écrite dans des bases des espaces vectoriels $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$). Cette matrice est appellée la <u>matrice jacobienne.</u>

La différentiabilité entraîne l'existence des dérivées partielles. On peut le voir sur un exemple d'une fonction f à p variables à valeurs réelles ($q = 1$). Par définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_i + h_i, \cdots, a_p) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_p)}{h_i}.$$

Par définition de la différentielle on a aussi

$$\frac{f(a_1, \cdots, a_i + h_i, \cdots, a_p) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_p)}{h_i} = \frac{\mathrm{d}f(A)(H) + r(H)}{h_i}$$

Ici H est le vecteur transposé de $(0, \cdots, h_i, \cdots, 0)$. Donc $r(H) = o(\|H\|) = o(h_i)$ et

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{\mathrm{d}f(A)(H) + r(H)}{h_i} = \lim_{h_i \to 0} \frac{\mathrm{d}f(A)(H)}{h_i}.$$

Donc ici

$$\mathrm{d}f(A)\ {}^{\dagger}(0, \cdots, 0, h_i, 0, \cdots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \cdot h_i$$

et par linéarité

$$\mathrm{d}f(A)\ {}^{\dagger}(h_1, \cdots, h_i, \cdots, h_p) = \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \cdot h_i$$

Finalement, on remarque que

$$\mathrm{d}f(A)(H) = Jac(f)(A)H \text{ et } \mathrm{d}f(A) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\, \mathrm{d}x_i$$

car les différentielles de fonctions x_i, notées $\mathrm{d}x_i$, satisfont $\mathrm{d}x_i(H) = h_i$.

Dans les exercices de nature théorique, la différentiabilité est souvent établie en montrant directement par des majorations que le reste $r(H)$ est un $o(\|H\|)$. Mais si f est donnée explicitement au moyen des fonctions usuelles, on va plus vite en constatant simplement l'existence et la <u>continuité</u> de ses dérivées partielles. Si une fonction est de classe C^1 elle est différentiable.

Propriété 59. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $X_0 \in D$. Si $\forall i = 1, \ldots, p$, $\forall j = 1, \ldots, q$, $X \mapsto \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)$ *existe au voisinage de* X_0 *et est continue en* X_0, alors f est différentiable en X_0.

En termes moins précis, que j'ai prise dans le livre [2] et que je pense essentielle pour la compréhension du cours, la GRANDE IDÉE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL :

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} \text{accroissement} \\ \text{de la fonction} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{terme linéaire par rapport à} \\ \text{l'accroissement de la variable} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{petit terme} \\ \text{correctif} \end{pmatrix}$$

Proposition 60. Propriétés de la différentielle.

(1) **Continuité.** Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

(2) **Linéarité.** Soient $f, g : D \to \mathbb{R}^q$ deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. Si f et g sont différentiables en $A \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{d}(f+g)(A) = \mathrm{d}f(A) + \mathrm{d}g(A)$ et $\mathrm{d}(\lambda f)(A) = \lambda\, \mathrm{d}f(A)$.

(3) **Composition.** Soient $g : D \to E \subset \mathbb{R}^m$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}^p$ et différentiable en $A \in D$, et $h : E \to \mathbb{R}^q$ différentiable en $g(A)$, alors $h \circ g$ est différentiable en A et la différentielle $\mathrm{d}(h \circ g)(A) = \eth(g(A)) \times \mathrm{d}g(A)$

La composition suit de la formule (6) :

$$\begin{aligned} h(g(A+H)) - h(g(A)) = & \ \mathrm{d}h(g(A))(g(A+H) - g(A)) + \text{ petit reste} \\ = & \ \mathrm{d}h(g(A))\,\mathrm{d}g(A)(H) + \text{ un autre petit reste} \end{aligned}$$

En pratique c'est donné par le produit des matrices jacobiennes (comparer avec l'équation (5)).

Regardons maintenant une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in D$. On remarque que la différentielle d'une fonction $(x, y) \to f(x, y)$ au point (x, y) est égale à :

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Exemple 61. (1) On reprend : soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante

$$f : \ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On sait que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ parce qu'elle n'est même pas continue. Comment se comportent ses dérivées partielles au voisinage de $(0,0)$?

On a vu que si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{y_0(y_0^2 - x_0^2)}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est bien définie au voisinage de $(0,0)$, mais elle n'est pas continue : si $x_n = 1/n$ et $y_n = 2/n$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \dfrac{2/n^2}{(1/n^2 + 4/n^2)^2} = \dfrac{2/n^2}{25/n^4}$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \neq 0$.

(2) Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \\ (x,y) \mapsto (x^2y^2, x+y) \end{cases}$$

Est-elle différentiable en $(2,3)$?

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f^1}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0y_0^2$, $\dfrac{\partial f^1}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0x_0^2$, $\dfrac{\partial f^2}{\partial x}(x_0,y_0) = 1$, $\dfrac{\partial f^2}{\partial y}(x_0,y_0) = 1$.

Toutes ces dérivées partielles sont continues en $(2,3)$ donc f est différentiable en $(2,3)$. On a $Jac(f)(2,3) = \begin{pmatrix} 36 & 24 \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

est-elle différentiable en 2 ? Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 2x_0$. Elle est continue en 2 donc f est différentiable en 2 et $Jac(f)(2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(2) = f'(2) = 4$.

4. Chapitre IV. Propriétés géométriques des fonctions de plusieurs variables

4.1. **Dérivée directionnelle.**

Définition 62. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $A \in D$ et $\overrightarrow{V}$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$. On dit que f a une dérivée au point A en suivant le vecteur $\overrightarrow{V}$ si l'expression :

$$D_{\overrightarrow{V}} f(A) := \lim_{t \to 0} \frac{f(A + t\overrightarrow{V}) - f(A)}{t}$$

existe. $D_{\overrightarrow{V}} f(A)$ s'appelle la <u>dérivée directionnelle</u> de f en A en direction de vecteur $\overrightarrow{V}$.

Remarque 63. Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont des dérivées directionnelles de f en A en direction de vecteurs de base $e_i = {}^t(0, \cdots, \underbrace{1}_{i}, \cdots, 0)$.

Proposition 64. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, de classe C^1, en $A \in D$ et $\overrightarrow{V}$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Alors, la dérivée directionnelle de f en A en direction de vecteur $\overrightarrow{V}$ est égale au produit scalaire du gradient de f au point A et du vecteur $\overrightarrow{V}$:

$$D_{\overrightarrow{V}} f(A) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(A) \cdot \overrightarrow{V} \tag{8}$$

Démonstration. On va démontrer cette proposition pour le cas $p = 2$. La généralisation au cas $p > 2$ est assez directe. Soit $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{V} = \lambda \overrightarrow{i} + \mu \overrightarrow{j}$ et $A = (x_0, y_0) \in D \in \mathbb{R}^2$. Soit une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $u(t) = (x_0, y_0) + t\overrightarrow{V} = \left(x_0 + \lambda \overrightarrow{i}, y_0 + \mu \overrightarrow{j}\right) := (x(t), y(t))$. On considère une fonction d'une variable à valeurs réelles : $F(t) = f(u(t))$. C'est une fonction composée. Sa dérivée en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(0) &= \frac{\mathrm{d}(f \circ u)}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \frac{\partial x(t)}{\partial t}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t}(0) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \lambda + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \mu = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \overrightarrow{V}
\end{aligned}$$

car $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \dfrac{\mathrm{d}(x_0 + \lambda t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \lambda$ et $\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \dfrac{\mathrm{d}(y_0 + \mu t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \mu$. De l'autre coté

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(u(t)) - f(u(0))}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t) - f(x_0, y_0)}{t} := D_{\overrightarrow{V}} f(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

D'où la relation (8). □

4.2. **Gradient.** Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\underline{C^1}$. Son gradient, pris en tout point de D définit une fonction à valeurs vectorielles $\overrightarrow{\text{grad}} f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, noté aussi :

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) \ := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y).$$

4.2.1. ***Propriété [a] : Le gradient est perpendiculaire à la ligne de niveau.***

Définition 65. Soit X un point d'une courbe $\Gamma \in \mathbb{R}^p$ et T une droite tangente à Γ au point X. On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{V}$ est <u>perpendiculaire à la courbe</u> Γ au point X si $\overrightarrow{V}$ est perpendiculaire à T. Dans ce cas on dit aussi que $\overrightarrow{V}$ est <u>normal à la courbe</u> Γ au point X.

En particulier, cela signifie que le produit scalaire de V et du vecteur directeur de T est égal à 0.

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $(x,y) \in D$, alors si $f(x,y) = a$, (x,y) appartient à la ligne de niveau $L_a(f)$.

Théorème 66. *Le vecteur gradient* $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$ *est normal à la courbe* $L_a(f)$ *au point* (x,y).

Démonstration. Soit $(x+h, y+k) \in L_a(f)$ un point au voisinage de (x,y), qui appartient à la même courbe de niveau que (x,y).

Alors, $f(x+h,y+k) - f(x,y) = 0$ car les valeurs de f en ces deux points sont égales. De la grande idée du calcul différentiel (7) on a :

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k) - f(x,y) = & \ df(x,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h,k)\|) \\ = & \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot k + o(\|(h,k)\|). \end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{(h,k)\to 0} o(\|(h,k)\|) = 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot k \to 0$ quand $(x+h, y+k) \to (x,y)$. Quand $(x+h,y+k) \to (x,y)$ tout en restant sur $L_a(f)$, le vecteur (h,k) est un vecteur tangent à $L_a(f)$. On a alors trouvé que le produit scalaire de $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ et (h,k) égale 0, on en déduit que ces deux vecteurs sont orthogonaux. $\square$

Exemple 67. A. $f(x,y) = x^2 + y^2$. $L_a(f) = C((0,0), \sqrt{a})$ - cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{a}$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$. On remarque que $(2x,2y) = 2(x,y)$ est 2 fois le vecteur radial qui est en effet orthogonal au cercle.

B. Soit la courbe d'équation $x^2 - y = 0$. Pour calculer la normale en chaque point de cette courbe, on la voit comme une ligne de niveau 0 de la fonction $f(x,y) = x^2 - y$. La normale est donc donnée par son gradient : $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}$.

4.2.2. ***Propriété [b] : Le gradient indique la ligne de plus grande pente.*** Sur le graphe de la fonction f on prend un point $(x,y,f(x,y))$, alors (x,y) est sur la ligne de niveau $a = f(x,y)$.

Théorème 68. *Le gradient en (x, y) indique la direction de plus grande pente ≥ 0 sur Γ_f à partir d'un point en question.*

Démonstration.
$$f((x,y) + \overrightarrow{v}) - f(x,y) = \overrightarrow{\nabla} f(x,y) \cdot \overrightarrow{v} + o(\|\overrightarrow{v}\|)$$
Le produit scalaire $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) \cdot \overrightarrow{v}$ vaut $\|\overrightarrow{\nabla} f(x,y)\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$, où θ est l'angle entre les deux vecteurs. L'accroissement de la fonction atteint le maximum quand $\cos\theta = 1$, alors $\overrightarrow{v}$ doit être parallèle à $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$. □

Remarque 69. En suivant la ligne de plus grande pente dans D on a, sur le graphe, le chemin le plus court à parcourir pour obtenir une variation donnée de f. Autrement dit, si on veut passer le plus vite possible du niveau a au niveau b à partir d'un point (x, y) donné de niveau $a = f(x, y)$, il faut suivre le gradient.

4.3. **Formule de Taylor.**

Rappel : petit o. Soient f et g deux fonctions d'une variable à valeurs réelles. On dit que $g = o(f)$ au point a si :
$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$
Exemple : $u(x) = x^3, v(x) = x^2 + 2x$. En $a = 0$ on a $u(x) = o(v(x))$ et en $a = +\infty$ on a $v(x) = o(u(x))$.

Rappel : La formule de Taylor avec le reste en forme de Lagrange. Si f est $n+1$ fois différentiable en a, on a une approximation de f par un polynôme :
$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!} t^n + r_n(a,t)$$
où il existe $\theta \in [a, a+t]$ tel que $r_n(a,t) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} t^{n+1}$. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis : si f est continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b],\ a < b$ alors $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que $f(b) = f(a) + f'(x_0)(b - a)$.

Finalement, on a aussi **la formule de Taylor-Young** avec $r_n(a,t) = o(t^n)$:
$$f(a+t) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} t^k + o(t^n)$$
C'est cette formule qu'on va généraliser au cas de plusieurs variables.

Théorème 70. *(Formule de Taylor) Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^n au voisinage du point $A(a_1, a_2, \cdots a_p) \in D$. Soient $H(h_1, \cdots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ et l'intervalle $[A, A+H] \subset D$. Alors,*
$$f(A+H) - f(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left((h_1\partial_1 + \cdots h_p\partial_p)^k (f) \right)(A) + o(\|H\|^n)$$

Démonstration. Ici $\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Soit $F(t) = f(A + tH)$ une fonction composée d'une variable à valeurs réelles. On va utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour cette fonction. Pour cela on remarque que :
$$F'(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(A+tH)}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}(a_i + th_i)}{\mathrm{d}t}.$$

Pour la k-ème dérivée de la fonction composée $F(t)$ on a :

$$F^{(k)}(t) = \sum(\partial_{i_k} \cdots (\partial_{i_1} f(A+tH)\underbrace{)\cdots)}_{k \text{ fois}} \frac{\mathrm{d}(a_{i_1}+th_{i_1})}{\mathrm{d}t} \cdots \frac{\mathrm{d}(a_{i_k}+th_{i_k})}{\mathrm{d}t}$$

où on prend la somme sur tout $i_1 \in \{1, \cdots, p\}, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, p\}$. On remarque que $\dfrac{\mathrm{d}(a_{i_k}+th_{i_k})}{\mathrm{d}t} = h_i, \forall i \in \{1, \cdots, p\}$. Par le binôme de Newton cette formule se réécrit :

$$F^{(k)}(t) = (h_1\partial_1 + \cdots + h_p\partial_p)^k f(A+tH)$$

On écrit a formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $F(0+t)$ au voisinage de 0 :

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta)t^{n+1},\ \theta \in [0,t].$$

Pour $t = 1$ on a :

$$F(1) = F(0) + F'(0)t + \cdots \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta),\ \theta \in [0,1]$$

D'où :

$$f(a_1+h_1, \cdots, a_p+h_p) = f(a_1, \cdots, a_p) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(h_1\partial_1 + \cdots + h_p\partial_p)^k f(A) + r_n(A,H)$$

Le dernier terme est le reste :

$$r_n(A,H) = \frac{1}{(n+1)!}(h_1\partial_1 + \cdots + h_p\partial_p)^{n+1} f(A+\theta H) \equiv o(\|H\|^n).$$

$\square$

En particulier, la formule de Taylor à l'ordre 2 est la suivante :

$$f(A+H) = f(A) + \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} \partial_i\partial_j f(a)h_ih_j + o(\|H\|^2) \tag{9}$$

La matrice-colonne des entrées $\partial_i f$ est la matrice Jacobienne. La matrice $p \times p$ des dérivées secondes

$$Hess_f(A) := [\alpha_{ij}] = [\partial_i\partial_j f(A)]$$

s'appelle la matrice Hessienne de f en A. Par le théorème de Schwarz cette matrice est symétrique si f est de classe C^2. La forme quadratique $\alpha(u) = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij}u_iu_j$ s'appelle la forme hessienne de f en A.

Remarque 71. L'idée de la formule de Taylor c'est de trouver une approximation de la fonction par un polynôme dans un voisinage d'un point donné.

En particulier, pour $p = 2,\ A = (a,b),\ H = (h,k),\ (A+H) = (a+h, b+k)$ on a les formules de Taylor suivantes :

– $n = 0$

$$f(A+H) - f(A) = o((\sqrt{h^2+k^2})^0) \Leftrightarrow \lim_{H \to 0} \frac{f(A+H)-f(A)}{1} = 0$$

- continuité

– $n = 1$

$$f(A+H) - f(A) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

- différentiabilité.

– $n = 2$

$$(10)\quad \begin{aligned} f(A+H) &- f(A) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ &+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) + o(h^2+k^2) \end{aligned}$$

4.4. **Vecteur normal et plan tangent à un graphe d'une fonction de 2 variables.**

A. Surfaces et coordonnées curvilignes (Ici je suis le cours [4]).

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x,y,z) \in R^3 | (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$$

est le graphe de la fonction f sur D (définition 21). Il est évident que l'application :

$$F : D \to S,\ F(x,y) = (x,y,f(x,y))$$

est une bijection. Puisque les points de S sont donnés par des paires de nombres (x,y), l'ensemble S est une surface de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$.

Si on a un chemin $\Gamma : I \to D$, alors automatiquement on a un chemin $F \circ \Gamma : I \to S$ sur la surface S. Si

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de Γ alors le chemin $F \circ \Gamma$ sur S est donné par les trois fonctions :

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= f(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Soit $(x_0, y_0) \in D$. On peut trouver un chemin :

$$x = x_0 + t,\ y = y_0,\ z = f(x_0 + t, y_0)$$

sur la surface S pour lequel la coordonnée $y = y_0$ ne change pas et un autre chemin :

$$x = x_0,\ y = y_0 + t,\ z = f(x_0, y_0 + t)$$

pour lequel la coordonnée $x = x_0$ ne change pas. Ces chemins partant de points différents de la surface S tracent des lignes de coordonnées sur S. Pour cette raison on appelle (x,y) les coordonnées curvilignes sur S.

B. Plan tangent

Si la fonction $z = f(x,y)$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in D$, alors, quand $(x,y) \to (x_0, y_0)$ on a :

$$(11)\qquad f(x,y) = f(x_0,y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$$

où α et β sont des constantes égales aux dérivées partielles au point (x_0, y_0).

Considérons un plan dans $\mathbb{R}^3$ donné par une équation

$$(12)\qquad z = z_0 + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$$

où $z_0 = f(x_0, y_0)$. On voit que le graphe (11) de la fonction f autour du point (x_0, y_0) est éloigné du plan (12) d'une valeur négligeable devant $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Définition 72. Le plan

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) \tag{13}$$

avec $\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \beta = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ est appellé le plan tangent au graphe de la fonction $z = f(x,y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

C.Vecteur normal

Soit $(x,y,z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ et $F(x,y,z) = 0$ l'équation implicite d'une surface S (précédemment on avait une surface : $z = f(x,y)$ pour laquelle $F(x,y,z) = f(x,y) - z$.) Soit

$$t \in I \subset \mathbb{R},\ \gamma : t \mapsto \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

l'équation paramétrique d'une courbe de la surface passant par le point $P_0(x_0,y_0,z_0)$, c'est-à-dire qu'il existe

$$t_0 \in I, \text{ tel que } (x_0,y_0,z_0) = (f(t_0), g(t_0), h(t_0)) \text{ et } (x,y,z) = (f(t), g(t), h(t))$$

qui satisfont l'équation $F(x,y,z) = 0$ pour tout $t \in I$. Soit $u(t) = F(f(t), g(t), h(t))$ une fonction composée de $I \to \mathbb{R}$, qui est identiquement nulle sur I. Donc au point $t = t_0$ on a

$$0 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

De l'équation (14) suit que le vecteur ${}^t\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{t=t_0}$ est orthogonal au vecteur ${}^t\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right) \equiv \overrightarrow{\mathrm{grad}} F(P_0)$. Le vecteur ${}^t\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{t=t_0}$ est un vecteur quelconque dans l'espace tangent à S au point P_0. Donc le vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(P_0) = {}^t\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)(P_0)$$

est orthogonal à tout vecteur tangent à la surface S passant par P_0. Cela signifie exactement que le vecteur gradient est normal à la surface S.

L'équation du plan tangent à la surface donnée par l'équation $F(x,y,z) = 0$ est facile à établir : c'est le plan passant par P_0 tel que tout vecteur de ce plan est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(P_0)$. Les coordonnées d'un point $M(x,y,z)$ du plan vérifient : $\overrightarrow{P_0M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} F(P_0) = 0$. Ce produit scalaire donne l'équation du plan tangent :

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)(P_0) = 0.$$

De façon plus explicite :

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(P_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(P_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) = 0.$$

On peut comparer cette formule à la formule (13).

5. Extrema

5.1. Extrema locaux et globaux. Définition. On étudie le comportement d'une fonction de plusieurs variables à valeurs réelles. Une telle fonction peut avoir des valeurs extrémales : des minima (des valeurs les plus petites) ou des maxima (des valeurs les plus grandes) sur tout le domaine de définition ou bien sur une certaine partie. On les appelle des extrema.

Définition 73.
1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) global au point $A \in D$ si pour tout $X \in D$ on a $f(X) \leq f(A)$ (resp. $f(X) \geq f(A)$). Le maximum (resp. minimum) est appelé strict si $f(X) < f(A)$ (resp. $f(X) > f(A)$).
2. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local au point $A \in D$ si on peut trouver un nombre $r > 0$ tel que $X \in D$ et $\|X - A\| < r$ entraîne $f(X) \leq f(A)$ (resp. $f(X) \geq f(A)$).

Les extrema globaux sont appelés aussi extrema absolus.

5.2. Théorème des extrema sur un compact.

Théorème 74. *Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un compact $K \subset \mathbb{R}^p$. Alors f admet un maximum et un minimum sur K.*

Remarque 75. En dimension $p = 1$ la fonction a des points extrémaux sur un intervalle. Soit ils sont à l'intérieur de l'intervalle, auquel cas ils vérifient $f'(x) = 0$, soit ils sont au bord de l'intervalle (sur le bord, la condition $f'(x) = 0$ n'est pas forcément satisfaite). Donc pour trouver les extrema on cherche d'abord des points critiques (où la derivée s'annule), puis on compare la valeur des points critiques avec les valeurs sur le bord de l'intervalle. Les valeurs max et min se trouvent parmi ces valeurs-là.

Définition 76. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. On dit que $A \in D$ est un point critique de f si toutes les dérivées partielles s'annulent en A (équivalent à dire que le gradient de f est nul en A, équivalent à dire aussi que la différentielle de f est nulle en A).

Théorème 77 (Condition nécessaire d'extremum local)**.** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ admettant un maximum ou un minimum local au point $A \in U$. Alors A est un point critique de f.*

Démonstration. Reprenons la formule de Taylor (10) à l'ordre 2 en dimension 2. La preuve se généralise sans problème aux dimensions supérieures.

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$
$$+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right) + o(\|(h, k)\|^2)$$

Si on a un maximum local en A, alors $f(a+h, b+k)-f(a, b) \leq 0$ pour tout (h, k) suffisamment petit. La valeur de la fonction linéaire de deux variables $h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, si elle n'est pas 0, est grande par rapport aux termes suivants. Donc cette valeur, si elle n'est pas égale à 0, doit être négative. Pourtant pour h, k positifs il faut que les constantes $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a,b) \leq 0,\ i=1,2$ et pour h,k négatifs il faut que les mêmes valeurs $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a,b) \geq 0,\ i=1,2$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0,\ i=1,2$. On peut refaire le même raisonnement pour un min local. $\square$

5.3. **Extrema de fonctions de 2 variables - critère par le déterminant de matrice Hessienne.**
Soit $f:\ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$. Quand $p=1$, pour savoir si un point critique X_0 est un maximum local ou un minimum local, on étudie la dérivée seconde (quand elle existe) :

- si $f''(X_0) > 0$, alors $f(X_0)$ est un minimum local,
- si $f''(X_0) < 0$, alors $f(X_0)$ est un maximum local,
- si $f''(X_0) = 0$, il faut faire des calculs supplémentaires de dérivées supérieures - ce peut être un point d'inflexion, un maximum ou un minimum.

Dans le cas de plusieurs variables à la place de f'', on étudie la Hessienne.

Propriété 78. Soit $f:\ D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$ un point critique de f. On suppose que la Hessienne $Hf(X_0)$ existe. Alors

- si toutes les valeurs propres de $Hf(X_0)$ sont strictement positives, $f(X_0)$ est un minimum local,
- si toutes les valeurs propres de $Hf(X_0)$ sont strictement négatives, $f(X_0)$ est un maximum local,
- sinon, et si toutes les valeurs propres ne sont pas 0, il n'y a pas d'extrema. Si toutes les valeurs propres sont 0, il faut étudier des termes d'ordre supérieur dans la décomposition de Taylor en X_0.

Pour $p=2$ on fait le calcul de la formule de Taylor. Au point critique $X_0(a,b)$ on a

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) + o(\|(h,k)\|^2)$$

Donc le signe de la forme quadratique (la forme hessienne)

$$\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right)$$

va déterminer si on a un maximum, un minimum ou ni l'un ni l'autre. Pour avoir un maximum (resp. minimum) il faut que la forme soit négative (resp. positive) pour tout (h,k) au voisinage de $(0,0)$. Si la forme hessienne n'est pas de signe défini on a des couples (h,k) pour lesquelles la valeur de $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ est positive et d'autres pour lesquelles cette valeur est négative. Donc on a des directions (h,k) dans lesquelles la fonction a un maximum au point (a,b) et d'autres où la fonction a un minimum au même point. Ce type de point critique s'appelle un <u>point selle</u> (comme une selle de cheval) ou bien <u>point col</u> (comme dans les montagnes).

On étudie alors la forme hessienne. On choisit des notations standard :

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b),\ S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b),\ T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

On suppose que $R \neq 0$ et on réécrit la forme hessienne :

$$\begin{aligned} Rh^2 + 2Shk + Tk^2 &= R\left(h^2 + 2\frac{S}{R}hk + \frac{T}{R}k^2\right) \\ &= R\left(h^2 + 2\frac{S}{R}hk + \left(\frac{S}{R}\right)^2 k^2 - \left(\frac{S}{R}\right)^2 k^2 + \frac{T}{R}k^2\right) \\ &= R\left(\left(h + \frac{S}{R}k\right)^2 + \left(\frac{T}{R} - \frac{S^2}{R^2}\right)k^2\right) \end{aligned}$$

Puisque le premier terme $\left(h + \frac{S}{R}k\right)^2 \geq 0$, c'est le deuxième terme qui définit si la forme est de signe défini. Alors,

- Si $(\frac{T}{R} - \frac{S^2}{R^2}) > 0$ ($\Leftrightarrow RT - S^2 > 0$) on a un maximum si $R < 0$ et minimum si $R > 0$.
- Si $RT - S^2 < 0$ on a un point selle.

Remarque 79. Si $RT - S^2 > 0$ la condition $R > 0$ ($R < 0$) est équivalente à la condition $R+T > 0$ ($R+T < 0$) i.e. la condition sur la trace de la matrice hessienne.

Recherche des extrema :

- Déterminer des points où f n'est pas de classe C^1 et regarder les valeurs de f en ces points. Par exemple, la fonction $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ admet un maximum à l'origine mais on ne le trouve pas parmi les points critiques.
- Rechercher les points critiques.
- Etudier les points critiques.

Exemple 80. Extrema locaux et globaux de $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= 4xy + 4x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y+1) &= 0 \\ x^2 + y &= 0 \end{cases}$$

On trouve alors trois points critiques $(0,0), (-1,-1)$ et $(1,-1)$.

pt critique	$(0,0)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$
$R = 4y + 4$	4	0	0
$S = 4x$	0	-4	4
$T = 2$	2	2	2
$RT - S^2$	8	-16	-16
Signe de R	> 0		
Nature du pt critique :	min	pt selle	pt selle

Les extrema globaux : on voit que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^2 = +\infty$$

donc pas de maximum global. Pas de minimum global non plus car

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,-2) = \lim_{x\to\pm\infty} -2x^2+4 = -\infty$$

Ici on a utilisé un critère par le signe du déterminant (et de la trace) de la matrice hessienne pour déterminer la nature du point critique. Si le déterminant est 0 on doit regarder la formule de Taylor à l'ordre supérieur (à l'ordre 3 et parfois plus).

Exemple 81. On cherche des extrema locaux de $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

On trouve 3 points critiques $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$ pour lesquels on ne peut pas utiliser le critère car $RT - S^2 = 0$ mais $g(x,y) = (x^2-1)^2 + y^4 - 1$ donc en $(\pm 1, 0)$ il y a un minimum local. En $(0,0)$ on a $g(0,0) = 0$ et au voisinage de $(0,0)$ on a des valeurs positives et négatives $g(0,y) = y^4 > 0$ et $g(y,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ pour x suffisamment petit. Donc $(0,0)$ n'est pas un max ni un min, c'est un point-selle.

5.4. **Extrema liés.** Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $g(x,y) = 0$ l'équation de la courbe $C \subset K$. Si C est le bord de K, on a une notation $C = \partial K$. On regarde la restriction de f sur la courbe C. Si la courbe C a pour équation $g(x,y) = 0$, tous les points de la courbe satisfont cette équation. Quand on cherche les extrema de la fonction f sur C on dit qu'on étudie les extrema de f assujettie à la contrainte $g(x,y) = 0$. Ce sont des extrema liés.

Exemple 82. Exemple A. Voici un exemple de problème de recherche d'extrema liés : parmi des rectangles avec la somme de cotés $2p$ (où p est un nombre positif donné), trouver un rectangle à l'aire maximale. Soient x, y les cotés du rectangle. Alors on a $\sigma(x,y) = xy$ l'aire, qui doit être maximale tandis que (x,y) sont sousmis à la condition $x + y = p$. Ici, il est facile d'exprimer y par x et trouver un maximum d'une fonction d'une variable ainsi obtenue.

Il est rare que l'on puisse exprimer y directement comme une fonction de x en utilisant la contrainte.

Exemple B. Regardons un exemple de la page 362 [2] : la fonction $f(x,y) = x^2+y^2$ et la contrainte, la courbe C, définie par une équation $g(x,y) = 0$. Il s'agit de trouver un minimum de f, lié par cette relation $g(x,y) = 0$. C'est un minimum de f sur la courbe C. Géométriquement on peut résoudre le problème en traçant des lignes de niveau de f. Les lignes de niveau de f sont des cercles concentriques du centre $(0,0)$. Si on trace des cercles de rayons croissants, jusqu'à leur rencontre avec la courbe C, la valeur critique est sur le cercle qui touche la courbe. Faites un dessin - c'est instructif (dessinez une courbe quelconque et tracez les cercles).

La méthode générale utilise la considération suivante. Soit $P(a,b)$ un point extremum de f restreint à la courbe C. Le vecteur tangent à la courbe au point P doit être aussi tangent à la ligne de niveau $f(a,b)$ (on le voit clairement dans l'exemple B). Mais les lignes de niveau sont normales au gradient de f, de l'autre côté le vecteur tangent à C est normal au gradient de g. Donc ces deux gradients sont proportionnels. On appelle le coefficient de proportionnalité le multiplicateur de Lagrange.

Proposition 83. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Soit (a,b) un point de U tel que :

(1) f soumise à la contrainte $g(x,y) = 0$ admet un extremum au point(a,b).

(2) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ g(a,b) \neq 0$

Alors il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a,b) = \lambda\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ g(a,b)$.

Les nombres a, b, λ sont des solutions du système d'équations suivant : les dérivées partielles de $f(x,y) - \lambda g(x,y)$ par rapport à x, y, λ doivent être égales à 0.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b) & = 0 \\ g(a,b) & = 0 \end{cases}$$

Exemple 84. Trouver le point de la courbe $y = x^2$ qui est le plus près du point $(0, h)$. Alors, ici $g(x,y) = y - x^2$, et $f(x,y) = x^2 + (y-h)^2$ - le carré de la distance. Les gradients nous donnent

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x & = 0 \\ 2(y-h) - \lambda & = 0 \\ y - x^2 & = 0 \end{cases}$$

Les solutions : soit $x = 0$, et alors $y = 0$ aussi, ou bien $\lambda = -1$ et $y = h - 1/2$, $x = \pm\sqrt{h - 1/2}$. Alors pour $h \geq 1/2$, les points $(\pm\sqrt{h-1/2}, h - 1/2)$ sont à la distance minimale de $(0, h)$. Si $h < 1/2$ on a $(0,0)$ comme point le plus proche.

Théorème 85. *Soit f une fonction C^2 sur un compact $K \subset \mathbb{R}^2$, alors f atteint un minimum et un maximum globaux sur K. Ces points d'extrema sont*
- *soit des points intérieurs de K, auquel cas ce sont des points critiques ($\overrightarrow{grad}\, f = 0$ en ces points)*
- *soit ils sont sur le bord ∂K de K auquel cas ils sont donnés par le calcul des extrema liés en utilisant des multiplicateurs de Lagrange.*

Exemple 86. Trouver les extrema globaux de $f(x,y) = y + y^2 - x^2 + 3$ sur $B(0,1)$ disque de centre $(0,0)$ de rayon 1. On cherche les points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = -2x & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = 1 + 2y & = 0 \end{cases}$$

On trouve un seul point critique $(0, -1/2)$. Ce point se trouve dans le disque et sa valeur est $f(0, -1/2) = 11/4$

La matrice hessienne donne :

$$\text{dét} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow (0, -1/2) \text{ point selle.}$$

Il faut alors chercher les extrema globaux sur le bord $x^2 + y^2 - 1 = 0$. On a :

$$\begin{cases} -2x - 2\lambda x & = 0 \\ 1 + 2y - 2\lambda y & = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 & = 0 \end{cases}$$

On trouve les points $(0, \pm 1)$ et $(\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}, -\dfrac{1}{4})$. Les valeurs : $f(0,1) = 5$, $f(0,-1) = 3$, $f(\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}, -\dfrac{1}{4}) = \dfrac{15}{8}$. On compare ces valeurs et conclut que le max se trouve au point $(0,1)$ et le min aux points $(\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}, -\dfrac{1}{4})$.

5.5. **Extrema d'une fonction de $n > 2$ variables.** En dimension n on procède de la même façon qu'en dimension 2. En utilisant la formule de Taylor en dimension n au voisinage d'un extremum on voit que la condition nécessaire est que le gradient s'annule aux points d'extrema locaux. La condition suffisante pour avoir un miminum (resp. maximum) est que la forme hessienne soit positivement (resp. négativement) définie.

Pour les extrema liés on a le théorème suivant ([2]) :

Théorème 87. *Soient $f, g_1, \cdots g_n$ des fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, et E un ensemble défini par les équations :*

$$g_1(X) = 0, \cdots, g_n(X) = 0, \text{ avec } X \in U.$$

Si la restriction de f à E admet un extremum local en $A \in E$, et si les différentielles $Dg_1(A), \cdots, Dg_n(A)$ sont linéarement indépendantes sur $\mathbb{R}^p$, alors nécessairement les formes linéaires $Df(A), Dg_1(A), \cdots, Dg_n(A)$ sont liées. En d'autres termes, il existe des coefficients réels $\lambda_1, \cdots \lambda_n$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que

$$Df(A) = \lambda_1 Dg_1(A) + \cdots \lambda_n Dg_n(A)$$

6. Chapitre VI. Champs de vecteurs

6.1. Definitions.

Définition 88. Un champ de vecteurs sur $D \subset \mathbb{R}^p$ est une application qui à tout point M de D associe un vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ de $\mathbb{R}^p$. Soit $\{O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, alors un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ est donné par trois fonctions P, Q et R sur D à valeurs réelles :

$$\overrightarrow{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k}$$

On dit que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est de classe C^k sur D si P, Q, R sont de classe C^k.

Les fonctions à valeurs réelles, on les appelle parfois des champs scalaires, tandis que les champs vectoriels sont des fonctions à valeurs vectorielles. Quand on dessine un champ de vecteurs, on a des vecteurs associés à tout point du domaine de définition. Pour dessiner un champ de vecteurs, on prend quelques points sur le plan $\mathbb{R}^2$ et en chaque point choisi on calcule la valeur du champ ; on fait un dessin du vecteur ainsi obtenu en commençant au point choisi. Voici quelques exemples de champs faciles à dessiner :

Exemple 89.
Champ uniforme : champ constant, par exemple, $\lambda\overrightarrow{i}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Champ convergent : $-x\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j}$.
Champ tournant : $-y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$.

6.2. **Gradient. Opérateur Nabla.** Le gradient est un exemple d'un champ de vecteurs. Le gradient d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^n$ associe à chaque point X de D le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(X)$. Dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées $\{x, y, z\}$ on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(X), \frac{\partial f}{\partial y}(X), \frac{\partial f}{\partial z}(X)\right).$$

Dans $\mathbb{R}^3$ on regarde un opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ à coordonnées $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Cet opérateur vectoriel

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{15}$$

agissant sur une fonction f est égal au gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f$. Cet opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ est aussi appelé l'opérateur de Hamilton (c'est le même Hamilton (1805 - 1865) qui a introduit le mot "vecteur").

Linéarité du gradient : Soient f_1, f_2 des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ et λ, μ des nombres réels. Alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda\ \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_1 + \mu\ \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_2$

On peut se poser une question : et si tous les champs de vecteurs sont des gradients de fonctions ? On voit rapidement que c'est une restriction assez forte.

Définition 90. Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$. S'il existe $f : D \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ on dit que le champ $\overrightarrow{V}$ dérive du potentiel scalaire f sur D et $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient aussi appelé un champ potentiel.

Remarque 91.

1. La condition $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ dans certains livres de physique est donnée avec un signe : $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ pour des raisons de convention dans certaines équations.
2. Si la fonction f existe, elle est unique à une constante près.

6.3. **Divergence et Rotationnel.**

A l'aide de l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ on peut définir des opérations sur des champs - la divergence et le rotationnel.

Soit $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1. Le produit scalaire de l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ avec le champ $\overrightarrow{V}$ donne une fonction, qui s'appelle la divergence de $\overrightarrow{V}$.

Le produit vectoriel de l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ avec un champ $\overrightarrow{V}$ donne un nouveau champ, qui s'appelle le rotationnel de $\overrightarrow{V}$.

La divergence agit sur des champs de vecteurs et donne des fonctions.

Définition 92. Soit $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs, $\overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$, où P, Q, R sont des fonctions $D \to \mathbb{R}$. La divergence de $\overrightarrow{V}$ est

$$\mathrm{div}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{16}$$

On remarque que la divergence est linéaire :

$$\mathrm{div}(\lambda\overrightarrow{V} + \mu\overrightarrow{W}) = \lambda\ \mathrm{div}\overrightarrow{V} + \mu\ \mathrm{div}\overrightarrow{W}$$

Le rotationnel agit sur des champs de vecteurs et donne des champs de vecteurs.

Définition 93. Soit $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs, $\overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$, où P, Q, R sont des fonctions $D \to \mathbb{R}$. Le *rotationnel* de $\overrightarrow{V}$ est

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V} &= \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}. \end{aligned} \tag{17}$$

On remarque que le rotationnel est linéaire :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\lambda\overrightarrow{V}+\mu\overrightarrow{W})=\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}+\mu\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{W}$$

Exemple 94. Système d'équations de Maxwell pour le champ électromagnétique dans le vide :

$$1.\ \mathrm{div}\overrightarrow{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\qquad 2.\ \mathrm{div}\overrightarrow{B}=0$$
$$3.\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E}=-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\qquad 4.\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B}=\frac{\overrightarrow{j}}{\epsilon_0c^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Ici on note :

- $\rho(x,t)$ - la densité volumique de charge électrique au point $x=(x_1,x_2,x_3)$ à l'instant t,
- $\overrightarrow{j}(x,t)$ - le vecteur densité de courant,
- $\overrightarrow{E}(x,t)$ - le vecteur champ électrique,
- $\overrightarrow{B}(x,t)$ - le vecteur induction magnétique,
- ϵ_0 - la permittivité diélectrique du vide,
- c - la vitesse de la lumière dans le vide (= 299792458 m/s).

Remarque 95. Propriétés de l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$:

Soit $\overrightarrow{V}\ :D\to\mathbb{R}^3,\ D\subset\mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1, et $f:D\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors, on a

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V})=\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V})\equiv 0.$$

Formellement on peut le voir comme un produit mixte, qui est identiquement 0 si les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Ici ce ne sont pas des vecteurs mais des opérateurs vectoriels mais le produit mixte de $\overrightarrow{\nabla},\overrightarrow{\nabla}$ et $\overrightarrow{V}$ est identiquement 0. On a aussi

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}f=\overrightarrow{\nabla}\wedge(\overrightarrow{\nabla}f)\equiv 0. \tag{18}$$

Définition 96. L'opérateur

$$\Delta f=\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}f)$$

défini sur les fonctions $f:D\to\mathbb{R},\ D\subset\mathbb{R}^3$ de classe C^2 à valeurs dans les fonctions est appelé l'opérateur de Laplace.

6.4. **Théorème de Poincaré.** .

Proposition 97. Soit $\overrightarrow{V}\ :D\to\mathbb{R}^3,\ D\subset\mathbb{R}^3,\overrightarrow{V}=P\overrightarrow{i}+Q\overrightarrow{j}+R\overrightarrow{k}$, un champ de vecteurs, P,Q,R des fonctions de D vers $\mathbb{R}$. Une condition nécessaire pour que le champ $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire sur D est qu'en tout point M de D, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}=0$.

Démonstration. La relation 18 implique que pour qu'il existe $f:D\to\mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$ on a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}=0$. Cela se traduit en trois conditions sur les fonctions P,Q et R :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial y}&=\dfrac{\partial Q}{\partial z}\\ \dfrac{\partial P}{\partial z}&=\dfrac{\partial R}{\partial x}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}&=\dfrac{\partial P}{\partial y}\end{cases}$$

□

La condition suffisante pour un champ d'être un champ de gradient est une condition sur le domaine de définition du champ.

Théorème 98 (Poincaré)**.**
Soit $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un champ de vecteurs de classe* C^1 *tel que* $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = 0$. *Alors il existe une fonction* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *telle que* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad}\ f$.

Remarquez ici que le champ V est défini en tout point de $\mathbb{R}^3$. On ne donne pas ici de démonstration de ce théorème mais on remarque que le champ de vecteurs en question doit impérativement être de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. C'est $\mathbb{R}^3$, le domaine de définition du champ, qui joue un rôle important ici.
Voici une définition pertinente :

Définition 99. Un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est simplement connexe si D est connexe par arc (Définition 47) et toute courbe fermée de D peut être ramenée à un point par une déformation continue tout en restant dans D.

Exemple 100. Un exemple d'un domaine non-simplement connexe : un domaine de $\mathbb{R}^2$ - un anneau qu'on peut définir pour $r^2 < R^2$ par $D = \{(x, y) |\, r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. On peut voir ce domaine comme un disque de rayon R troué : le petit disque autour du centre est enlevé du grand disque. Il n'est pas simplement connexe. En effet, si on considère une courbe fermée de D (un lacet) qui contourne $(0, 0)$ il n'y a pas de façon de l'amener à un point, sans la faire "sauter" par dessus ce disque absent.

Le théorème de Poincaré se formule d'une façon plus générale :

Théorème 101 (Poincaré généralisé)**.**
Soit D *un domaine de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* $V : D \to \mathbb{R}^3$ *un champ de vecteurs de classe* C^1 *et* $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{V} = 0$. *Alors si* D *est simplement connexe, il existe une fonction* $f : D \to \mathbb{R}$ *telle que* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad} f$.

6.5. **Calcul du potentiel.** Si $\overrightarrow{V}$ est un champ potentiel, alors on peut trouver le potentiel à une constante près. On va faire un exemple de calcul ici.
Soit $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de composantes P, Q, R :

$$P(x, y, z) = 6x(y + z^2), \quad Q(x, y, z) = 3x^2, \quad R(x, y, z) = 6x^2 z$$

Il est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ car les fonctions P, Q, R sont des polynômes. De plus $\overrightarrow{\mathrm{rot}}V = 0$:

$$\begin{cases} \partial R/\partial y - \partial Q/\partial z & = 0 - 0 & = 0 \\ \partial P/\partial z - \partial R/\partial x & = 12xz - 12xz & = 0 \\ \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y & = 6x - 6x & = 0 \end{cases}$$

Par le théorème de Poincaré (Théorème 98), $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire. Déterminons tous les potentiels scalaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ du champ $\overrightarrow{V}$. on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \overrightarrow{V}$.

$$\begin{cases} \partial f/\partial x & = 6x(y + z^2) & (1) \\ \partial f/\partial y & = 3x^2 & (2) \\ \partial f/\partial z & = 6x^2 z & (3) \end{cases}$$

De (2) on a $f(x, y, z) = 3x^2 y + \phi(x, z)$, où $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. De (1) on a $\partial f/\partial x = 6x(y + z^2) = \partial(3x^2 y + \phi(x, z))/\partial x = 6xy + \partial\phi(x, z)/\partial x$. Donc

$$\partial\phi(x, z)/\partial x = 6xz^2 \ \Rightarrow\ \phi(x, z) = 3x^2 z^2 + \psi(z), \text{ où } \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

Il suit

$$f(x,y,z) = 3x^2y + 3x^2z^2 + \psi(z)$$

et avec l'équation (3) on a

$$\partial f/\partial z = 6x^2z = \partial(3x^2y + 3x^2z^2 + \psi(z))\partial z = 6x^2z + \psi'(z)$$

ce qui donne $\psi(z) = k,\ k$ - une constante. Finalement

$$f(x,y,z) = 3x^2y + 3x^2z^2 + k$$

est un potentiel scalaire de $\overrightarrow{V}$.

7. Chapitre VII. Formes différentielles

7.1. **Formes différentielles.**

Définition 102. On appelle 1-forme différentielle définie sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ une application α de U dans l'espace dual de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire dans $(\mathbb{R}^p)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$.

$$\alpha : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$$

Soit $x \in U$, alors $\alpha(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs sur U, cela signifie en particulier $\overrightarrow{V}(x) \in \mathbb{R}^p$. Comme on a $\alpha(x)$ application linéaire de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{V}(x) \in \mathbb{R}^p$ en chaque point x de U on a $\alpha(x)(\overrightarrow{V}(x)) \in \mathbb{R}$.

Cela montre qu'en chaque point de U l'espace des 1-formes différentielles est dual à l'espace de champs de vecteurs.

En effet, si un espace E (de dimension finie) est muni d'un produit scalaire, il existe un isomorphisme entre E et son dual. Ici E est l'espace des champs de vecteurs sur un ouvert $E = \mathrm{Vect}(U)$ avec un produit scalaire $< .|. > (x)$ défini en chaque point $x \in U$. On peut donc établir une correspondance entre l'espace des champs de vecteurs et son espace dual des 1-formes différentielles, noté $\Omega^1(U)$: si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs sur U il existe une unique 1-forme différentielle α sur U telle que $\forall x \in U$ et $\forall \overrightarrow{W} \in \mathrm{Vect}(U)$. On à

$$\alpha(\overrightarrow{W})(x) =< \overrightarrow{V}|\overrightarrow{W} > (x) \tag{19}$$

Nous avons déjà vu un exemple d'une 1-forme différentielle, c'est la différentielle d'une fonction f de classe C^1 sur l'ouvert U à valeurs dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$\mathrm{d}f : x \in U \mapsto \mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x_i.$$

En tant qu'application de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, elle s'écrit

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$$

Ici, nous notons $B^* = \{\mathrm{d}x_1, \cdots \mathrm{d}x_p\}$ la base duale de la base de l'espace des champs de vecteurs, la base canonique de $\mathbb{R}^p$. L'application $\mathrm{d}x_i$ est donc la $i-$ème 1-forme coordonnée :

$$\mathrm{d}x_i : (x_1, \cdots, x_p) \mapsto x_i$$

- sur un vecteur de coordonnées $(x_1, \cdots, x_p)$ la forme $\mathrm{d}x_i$ a pour valeur x_i (la forme différentielle et le champ de vecteurs considerés au même point de U). Pour tout X de $U, \alpha(X)$ s'écrit dans B^* avec des coefficients a_i qui dépendent du point X :

$$\alpha(X) = \sum_{i=1}^{p} a_i(X)\,\mathrm{d}x_i \tag{20}$$

Définition 103. Une 1-forme différentielle α est de classe C^k sur un ouvert U si les fonctions a_i qui interviennent dans (20) sont de classe C^k sur U.

7.2. **n-formes différentielles.** Pour définir les 1-formes différentielles nous avons travaillé avec des formes linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ mais nous pouvons définir des formes bilinéaires alternées (anti-symétriques) et plus généralement k-linéaires anti-symétriques $\mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^k, \mathbb{R})$.

Définition 104. Une application linéaire $L : (\mathbb{R}^p)^k \to \mathbb{R}^q$ est une k-forme anti-symétrique (= alternée) si la valeur de L change de signe sous une permutation de deux variables :

$$L(\overrightarrow{V}_1, \ldots, \overrightarrow{V}_i, \ldots, \overrightarrow{V}_j, \ldots, \overrightarrow{V}_k) = -L(\overrightarrow{V}_1, \ldots, \overrightarrow{V}_j, \ldots, \overrightarrow{V}_i, \ldots, \overrightarrow{V}_k)$$

En particulier, si $\overrightarrow{V}_i = \overrightarrow{V}_j$, et $i \neq j$ la valeur de L est 0.

Exemple 105. Le produit vectoriel $\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}$, où $\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W} \in \mathbb{R}^3$ est un exemple d'une forme anti-symétrique à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Ce qui nous intéresse ici ce sont des formes anti-symétriques à valeurs dans $\mathbb{R}$. On introduit le produit des formes linéaires de sorte qu'à deux formes $A \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^k, \mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^l, \mathbb{R})$ on associe une forme $A \wedge B \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^{k+l}, \mathbb{R})$. Ce produit est appelé le produit extérieur. Le produit extérieur, noté $\wedge$, est

– associatif : $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
– distributif : $(A + B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$
– anti-symétrique : $A \wedge B = (-1)^{kl} B \wedge A$ pour $A \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^k, \mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^l, \mathbb{R})$.

En particulier, si on a deux 1-formes $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ leur produit $A \wedge B \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^2, \mathbb{R})$ est anti-symétrique :

$$A \wedge B = -B \wedge A$$

En général, le produit extérieur des formes $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k$ est une k-forme anti-symétrique qui, évaluée sur k vecteurs de $\mathbb{R}^p$ a pour valeur :

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_k(\overrightarrow{V}_1, \ldots, \overrightarrow{V}_k) = \begin{vmatrix} A_1(\overrightarrow{V}_1) & \cdots & A_k(\overrightarrow{V}_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1(\overrightarrow{V}_k) & \cdots & A_k(\overrightarrow{V}_k) \end{vmatrix} = \det(A_j(\overrightarrow{V}_i)) \tag{21}$$

Définition 106. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $k \geq 0$ un entier. On appelle k-forme différentielle sur U une application

$$\omega : \; U \to \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^k, \mathbb{R})$$

telle que, pour tout x de $U, \omega(x)$ est une k-forme alternée sur $\mathbb{R}^p$. On note $\Omega^k(U)$ l'espace des k-formes différentielles sur $U \subset \mathbb{R}^p$.

Une k-forme différentielle est aussi appelée une forme différentielle de degré k.

On considère les fonctions à valeurs réelles comme des 0-formes différentielles.

Par exemple les 2-formes différentielles sur $U \subset \mathbb{R}^2$ forment l'espace des formes bilinéaires alternées. Donc si on a deux formes $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$, alors on a un produit $\alpha \wedge \beta \in \Omega^2(U)$ tel que $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$. En dimension 2 dans la base $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ les 1-formes sont $\alpha(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ et les 2-formes $\omega(x,y) = h(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Il n'y a pas de formes $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x$ ou $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y$ à cause de l'anti-symétrie, et $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$. Une k-forme différentielle dans $\mathbb{R}^p$ peut se décomposer

$$\omega(X) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le p} f_{i_1 i_2 \cdots i_k}(X)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}. \tag{22}$$

où $f_{i_1 i_2 \cdots i_k}(X)$ sont des fonctions sur $U \subset \mathbb{R}^p$ et $\mathrm{d}x_{i_j}$ sont des éléments de la base de $(\mathbb{R}^p)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

On peut définir la valeur d'une k-forme donnée évaluée sur k champs de vecteurs au point donné. On utilise la dualité entre les formes différentielles et les champs point par point donnée par le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.

Exemple 107.

(1) On peut regarder une 1-forme $z\,\mathrm{d}x$ dans $\mathbb{R}^3$ au point $(5,-2,3)$ évaluée sur un champ vectoriel $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\overrightarrow{i} + xy\overrightarrow{j} + 2z\overrightarrow{k}$. La forme $z\,\mathrm{d}x$ au point $(5,-2,3)$ est égale à $3\,\mathrm{d}x$. La valeur du champ

$$\overrightarrow{V}(5,-2,3) = 5^2 \cdot \overrightarrow{i} - 5 \cdot 2 \cdot \overrightarrow{j} + 6 \cdot \overrightarrow{k}.$$

L'évaluation de la 1-forme $3\,\mathrm{d}x$ sur $\overrightarrow{V}(5,2,3)$ est alors

$$< 3\,\mathrm{d}x, 25 \cdot \overrightarrow{i} - 10 \cdot \overrightarrow{j} + 6 \cdot \overrightarrow{k} >= 3 \cdot 25 < \mathrm{d}x, \overrightarrow{i} >= 75.$$

On utilise le fait que $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$ forme la base duale de la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ et par conséquent $< \mathrm{d}x, \overrightarrow{i} >= 1$, $< \mathrm{d}x, \overrightarrow{j} >=< \mathrm{d}x, \overrightarrow{k} >= 0$.

(2) On regarde une 2-forme $\omega = y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ dans $\mathbb{R}^2$ au point $(-3,2)$ évaluée sur deux champs vectoriels $\overrightarrow{W}(x,y) = (2x-y)\overrightarrow{i} + xy^2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{U} = 3y\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. D'abord, $\omega(-3,2) = 2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Les valeurs des champs au point donné sont $\overrightarrow{W}(-3,2) = (2\cdot(-3)-2)\overrightarrow{i} - 3\cdot 2^2 \cdot \overrightarrow{j} = -8\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{U}(-3,2) = 6\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. L'évaluation de la 2-forme ω sur $\overrightarrow{W}(-3,2)$ et $\overrightarrow{U}(-3,2)$ au point $(-3,2)$ en suivant la formule (21) est alors

$$< 2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, (-8\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j}) \wedge (6\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) >= 2 \cdot (-8) \cdot (1) < \mathrm{d}x, \overrightarrow{i} >< \mathrm{d}y, \overrightarrow{j} >$$
$$+2 \cdot (-12) \cdot 6 < \mathrm{d}y, \overrightarrow{j} >< \mathrm{d}x, \overrightarrow{i} >= -16 + 144 = 128.$$

7.3. **Formes exactes. Différentielle de de Rham.**

Définition 108. La 1-forme différentielle α de classe C^0 (ou continue) sur l'ouvert U est <u>exacte</u> s'il existe une fonction f de classe C^1 sur l'ouvert U telle que $\alpha = \mathrm{d}f$. On dit que f est une primitive de α.

Il existe des 1-formes différentielles qui n'ont pas de primitive. Sur un ouvert connexe, lorsqu'une primitive existe, elle est unique à ajout d'une constante près. Reconnaître si une 1-forme différentielle est exacte est un problème analogue à celui de savoir reconnaître si un champ de vecteurs est un champ de gradient (partie 6.5 du cours).

Plaçons-nous par exemple en dimension 2 et considérons un champ de vecteurs défini sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in U : \overrightarrow{V}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}.$$

ainsi qu'une forme différentielle α définie par :

$$\forall (x,y) \in U : \alpha(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Par la dualité (19) on a $\mathrm{d}f(x)((h,k)) =< \nabla f(x)|(h,k) >$. Alors les équations $\alpha = \mathrm{d}f$ et $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} f$ sont toutes les deux équivalentes au même système :

$$\begin{cases} P(x,y) &= \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ Q(x,y) &= \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

Comment vérifier si une 1-forme différentielle est exacte ? Pour les champs de vecteurs on avait le théorème de Poincaré général. Pour les 1-formes c'est exactement le même théorème. Pour le formuler en dimension quelconque il faut introduire un opérateur analogue à l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ qui agit sur les formes.

En fait on a déjà cet opérateur - c'est l'opérateur d :

$$\mathrm{d} = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Il faut comprendre que sur une forme différentielle ω (22) l'opérateur $\mathrm{d}x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ agit par les dérivées partielles sur les fonctions $f_{i_1 i_2 \cdots i_k}(X)$ et par multiplication extérieure de $\mathrm{d}x_i$ sur les formes $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$:

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}x_i \wedge \frac{\partial}{\partial x_i}\omega.$$

L'opérateur d est appellé la <u>différentielle de de Rham</u>, aussi appelé parfois la <u>différentielle extérieur</u> La différentielle de de Rham agit sur des fonctions de classe C^1 en les envoyant vers les 1-formes différentielles.

On peut définir l'action de d sur les 1-formes aussi bien que sur les fonctions. Par exemple, en dimension 2 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\ \ &\big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big) = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)\big(P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\big) \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

On a utilisé dans le calcul $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0$, et $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$.

Remarque 109. La différentielle de de Rham est un opérateur qui agit sur les formes différentielles et il augmente leur degré de 1, $\mathrm{d} : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$. Par exemple sur une forme (22)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(X) &= \sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le p} f_{i_1 i_2 \cdots i_k}(X)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_{i_1 i_2 \cdots i_k}(X)\right) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}
\end{aligned}$$

Lemme 110. *La différentielle de de Rham* $\mathrm{d} : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U),\ U \subset \mathbb{R}^p$ *au carré est nul :*

$$\mathrm{d}^2 = 0.$$

Démonstration. En coordonnées l'opérateur d agissant sur une forme différentielle $\omega \in \Omega^k(U)$ s'écrit : $\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\omega \in \Omega^{k+1}(U)$.

Son carré est calculé ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= (\mathrm{d}^2)\omega = \left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\omega = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega)\right) \\
&= \sum_{1 \le i < j \le p} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega)\right) + \sum_{1 \le j < i \le p} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega)\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega)\right).
\end{aligned}$$

En changeant les notations $i \leftrightarrow j$ dans la deuxième somme, on voit que la première somme a les termes $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega)\right)$ et la deuxième $\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega)\right)$ pour les mêmes i et j. En utilisant le lemme de Schwarz, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega)\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\omega)\right).$$

Puisque $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$ les deux premières sommes s'annulent mutuellement et pour la troisième somme on a : $\forall i,\ \ \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0$. □

Remarque 111. La différentielle de de Rham agit sur le produit extérieur de deux formes différentielles α et β de degrés p et q comme suit :

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathrm{d}\beta.$$

C'est facile à voir si on écrit α et β explicitement (comme dans (20)).

7.4. **La dimension 3 est spéciale.** Faisons le calcul d'action d'opérateur de de Rham en dimension 3.

0. Pour une 0-forme différentielle (c'est-à-dire simplement une fonction)

$$f = f(x, y, z)$$

définie sur un domaine $D \in \mathbb{R}^3$, où f une fonction de classe C^1 sur D, on obtient

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z, \tag{23}$$

Dans cette forme on reconnaît une expression pour la différentielle (cela est le cas pour toute dimension).

1. Pour une 1-forme différentielle

$$\alpha = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

définie sur un domaine $D \in \mathbb{R}^3$, où P, Q, R sont des fonctions de classe C^1 sur D, on obtient

$$\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{24}$$

2. Pour une 2-forme différentielle

$$\omega = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

définie sur un domaine $D \in \mathbb{R}^3$, P, Q, R des fonctions de classe C^1 sur D, on obtient

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \tag{25}$$

3. Une forme différentielle de degré 3 sur $D \subset \mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\nu = f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

avec $f(x, y, z)$ - une fonction sur D. Il n'y a pas de 4-formes différentielles à cause de l'anti-symétrie, donc en particulier, $d\nu = 0$, $\forall \nu \in \Omega^3(U)$, $U \subset \mathbb{R}^3$.

On reconnaît ici, au moins formellement, les expressions en coordonnées du gradient d'une fonction (23), du rotationnel (24) et de la divergence (25) du champ de vecteurs correspondant. De cette façon, dans $\mathbb{R}^3$ les opérateurs de la théorie des champs de vecteurs se révèlent être tous liés à la différentielle de de Rham sur des formes de degrés 0,1,2.

La dimension 3 est spéciale. En plus de la dualité entre les 1-formes et les champs de vecteurs dans la théorie des formes différentielles, il y a une dualité appelée dualité de Poincaré (le même Poincaré que le théorème). Cette dualité de Poincaré sur $\mathbb{R}^p$ est une application entre les k-formes et les $(p-k)$-formes. Par conséquent en dimension 3 les 1-formes sont duales aux $3-1=2$-formes. De ce fait, via cette dualité de Poincaré les 2-formes sont aussi liées aux champs de vecteurs.

7.5. **Formes fermées. Théorème de Poincaré pour les formes différentielles.**

Définition 112. On dit qu'une k-forme différentielle ω est fermée si $\mathrm{d}\omega = 0$.

Théorème 113 (Poincaré pour les formes différentielles sur $\mathbb{R}^p$)**.**
Soit α une k-forme différentielle sur $\mathbb{R}^p$. Alors α est exacte si et seulement si elle est fermée.

Exemple 114. On souhaite savoir si la forme $\alpha = 4xy\,\mathrm{d}x + (1 + 2x^2)\,\mathrm{d}y$ est exacte et trouver éventuellement sa primitive. La forme est définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier qui est simplement connexe. On a ici $P = 4xy$ et $Q = 1 + 2x^2$ On calcule :

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x - 4x = 0$$

La forme est donc exacte et on cherche une primitive f en résolvant le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 4xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 1 + 2x^2 \end{cases}$$

en intégrant la première de ces équations par rapport à x, il vient :

$$f(x, y) = 2x^2y + \phi(y),$$

où ϕ est une fonction d'une variable, dérivable. On utilise ensuite la deuxième équation :

$$\frac{\partial(2x^2y + \phi(y))}{\partial y} = 1 + 2x^2$$

D'où $\phi(y) = y + C$, $C \in \mathbb{R}$ et finalement

$$f(x, y) = 2x^2y + y + C$$

Cela correspond au calcul du potentiel du champ correspondant.

On utilise cette méthode pour résoudre certaines équations différentielles ordinaires - ici par exemple si on pense à $\frac{dy}{dx}$ comme à y', la dérivée de y par rapport à x on a intégré une équation différentielle

$$4xy + (1 + 2x^2)y' = 0.$$

Autre exemple : $\alpha = 2y^2(x + y)\,\mathrm{d}x + 2xy(x + 3y)\,\mathrm{d}y$ est une forme fermée et par conséquent exacte, donc sa primitive $f(x, y) = x^2y^2 + 2y^3x + C$ donne la solution $x^2y^2 + 2y^3x + C = 0$ de l'équation différentielle : $2y^2(x + y) + 2xy(x + 3y)y' = 0$.

On peut le voir comme ça : une équation différentielle peut se réécrire de la façon suivante : $\alpha = 0$, où α est une 1-forme différentielle. Alors, si $\alpha = df$, $f = const$ est la solution de l'équation différentielle $\alpha = 0$.

La théorie des formes différentielles est utilisée en intégration. Souvent on dit qu'on intègre des fonctions, en réalité on <u>intègre des formes différentielles</u>. Cette ligne de pensée va nous diriger vers l'intégration des fonctions de plusieurs variables.

8. Chapitre VIII. Intégrales multiples

8.1. **Définition. Intégrale double.** Soit f une fonction continue sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$. On partage ce rectangle en $n \cdot m$ petits rectangles $R_{ij}, i \in [1, m],\ j \in [1, n]$. R_{ij} a pour cotés le m-ième segment horizontal et le n-ième segment vertical. Son sommet supérieur droit est le point $(x_i, y_j) = (a + i \cdot \frac{b-a}{m}, c + j \cdot \frac{d-c}{n})$. La *somme de Riemann, S_{mn}*, est la somme des volumes des parallélépipèdes de bases sur R_{ij} et de hauteurs donnés par la valeur de f en (x_i, y_j) de R_{ij}

$$S_{mn} = \frac{b-a}{m}\ \frac{d-c}{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j).$$

Définition 115. L'intégrale double de f sur R est la limite des sommes de Riemann :

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{m\to\infty, n\to\infty} S_{mn}.$$

Propriété 116.

(1) **Linéarité.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R, alors

$$\iint_R (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lambda \iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mu \iint_R g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(2) **Croissance.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R, telles que $f(x, y) \le g(x, y),\ \forall (x, y) \in R$, alors

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint_R g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

On en déduit que

$$\left|\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \le \iint_R |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(3) **Théorème de Fubini pour un rectangle.** L'intégrale double d'une fonction réelle continue f sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ est égale à deux intégrales simples successives :

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b (f(x, y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d (f(x, y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$$

En particulier, si $f(x,y) = g(x)h(y)$

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y$$

8.2. **Aire d'une partie quarrable. Théorème de Fubini.** Pour définir l'intégrale double sur une partie de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un rectangle on introduit la notion d'une partie quarrable du plan.

Soit D une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle qui la contient.

On appelle subdivison σ de R, $m \cdot n$ rectangles $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], x_i, y_j \in R$ venant du partage de $[a,b]$ en m segments et de $[c,d]$ en n segments :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \ ; \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

pour m et n quelconques. Le rectangle R_{ij}, est d'aire $\mu(R_{ij}) = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$.

A toute subdivison σ de R on associe deux quantités qu'on appelle les sommes de Darboux :

$$s(\sigma) = \sum_{Rij \subset D} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j) \ \text{ et } S(\sigma) = \sum_{Rij \bigcap D \neq \emptyset} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j).$$

Définition 117. On dit que $D \subset R$ est quarrable si la borne supérieure des sommes $s(\sigma)$ est égale à la borne inférieure des sommes $S(\sigma)$. Leur valeur commune donne l'aire de D.

Remarque 118. Si D est une partie quarrable du plan alors la frontière de D est quarrable d'aire nulle. Ainsi, un disque ou un polygone sont des exemples de parties quarrables, que l'on prenne ou non leur frontière.

Définition 119. Une fonction f bornée sur une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ est intégrable si et seulement si la somme (aussi appelé une somme de Riemann)

$$\sum_{R_{ij} \bigcap D \neq \emptyset} f(u_i, v_j)\ \text{Aire}(R_{ij})$$

tend vers une limite finie indépendante du choix de (u_i, v_j) quand $x_{i+1} - x_i$ et $y_{j+1} - y_j$ tendent vers 0. Cette limite est appelée l'intégrale de f sur D :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Théorème 120. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée sur une partie quarrable du plan. Alors f est intégrable sur D.*

Remarque 121. La propriété d'être bornée est importante. C'est la même chose pour les fonctions d'une seule variable comme le montre l'exemple de la fonction $1/x$ qui n'est pas bornée sur l'intervale $]0,1]$: elle n'est pas intégrable !

Théorème 122. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur une partie quarrable du plan. Si l'ensemble des points de discontinuité de f est d'aire nulle alors f est intégrable sur D.*

Par ailleurs, l'aire d'une partie quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$ peut être vue comme une intégrale d'une fonction constante égale à 1 sur D :

$$Aire(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Il est facile d'expliquer cela par un raisonnement géométrique - présenter le graphe de la fonction 1 sur D et voir quel volume représente l'intégrale double.

Comment, en pratique, calcule-t-on les intégrales doubles sur une partie quarrable du plan ?

- Soit ϕ et ψ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

(Faire un dessin). Soit f une fonction réelle intégrable sur D. Alors, on a

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Exemple 123. On calcule

$$I = \iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où D est un triangle de sommets $(0,0),\ (0,1)$ et $(2,0)$. Alors ici

$$\phi(x) = 0 \text{ et } \psi(x) = -\frac{x}{2} + 1,\ x \in [0,2].$$

Donc

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{-x/2+1} (x+y)^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[(x+y)^3\right]_{y=0}^{y=-x/2+1} \mathrm{d}x = \frac{7}{6}$$

La variable x ayant exactement le même statut que la variable y donc on peut calculer la même intégrale comme suit :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2y} (x+y)^2\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

et obtenir le même résultat. Il faut faire attention aux bornes de l'intégrale. La valeur de l'intégrale est un nombre - on ne peut pas avoir des fonctions pour des bornes pour l'intégrale simple calculée en dernier.

8.3. **Changement de variables dans une intégrale double. Matrice jacobienne.** Soit f une fonction continue sur un compact quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit une bijection notée $\Delta \to D$ définie par :

$$(u,v) \mapsto (x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)),$$

ϕ et ψ étant de classe C^1. Alors,

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(\phi(u,v), \psi(u,v) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

où $\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne (définition 51) des dérivés premières de l'application $\Delta \to D$.

On peut le voir en utilisant le calcul des formes différentielles. Si $x = x(u,v)$ et $y = y(u,v)$ la 2-forme différentielle $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ s'exprime en $\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$ par le calcul suivant (dans le contexte des intégrales on n'écrit pas de symbole de produit $\wedge$) :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v \right) \\ = & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

Exemple 124. Si on effectue un changement linéaire des variables :

$$\phi(u,v) = au + bv,\ \ \psi(u,v) = cu + dv$$

alors, la fonction intégrée n'est modifiée que par le facteur

$$|ad - bc|,$$

(valeur absolue du déterminant). Lorsque ce déterminant est 1 (pour une rotation par exemple), la fonction intégrée reste inchangée. Ce changement de variables linéaire envoie un carré $[0,1] \times [0,1]$ vers le parallélogramme P engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Donc en particulier

$$Aire(P) = \int_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{[0,1]\times[0,1]} |ad - bc|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = |ad - bc|$$

Exemple 125. Changement en coordonnées polaires. Soit $[0,\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ une bijection entre les coordonées polaires et cartésiennes données par

$$(r,t) \mapsto (x = r\cos t, y = r\sin t).$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r.$$

Calculer $I = \iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ sur D, disque de centre $(0,0)$ de rayon R. Le calcul direct est assez long :

$$\begin{aligned} I = &\ \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} 2\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \\ = &\ \int_{-R}^{R} 2\,(y^3/3)_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}\int_0^R (\sqrt{R^2-x^2})^3\,\mathrm{d}x \\ = &\ \tfrac{4}{3}\int_{\pi/2}^{0} R^3\sin^3\theta(-R\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \tfrac{4}{3}R^4\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta = \tfrac{\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

où on utilise le changement de variables

$$x = R\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi/2, \qquad \mathrm{d}x = -R\sin\theta\ \mathrm{d}\theta,\ R^2 - x^2 = R^2(1-\cos^2\theta) = R^2\sin^2\theta.$$

On utilise aussi la linéarisation de $\sin^4\theta$:

$$\sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

Ce calcul a l'air assez long et fort utile, mais à l'aide d'un changement de variables sous l'intégrale double on arrive au résultat plus rapidement : les coordonnées polaires transforment le rectangle en disque. Ici on a un disque et donc :

$$\Delta = \{(r,t) \in \mathbb{R}^2\,|0 \le r \le R \text{ et } 0 \le t \le 2\pi\} \to D = \{(x,y) \in R^2\,\left|x^2 + y^2 \le R^2\right.\}$$

D'où

$$I = \iint_\Delta r^2\sin^2 tr\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{R^4}{4}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi R^4}{4}$$

8.4. **Volume. Intégrales triples.** Pour certaines parties $E \subset \mathbb{R}^3$ et certaines fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ on définit un nombre réel noté

$$I = \iiint_E f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

et appelé l'intégrale de f sur E.

Définition 126. Un compact élémentaire Δ de $\mathbb{R}^3$ est une partie de $\mathbb{R}^3$ de l'une des formes suivantes :

(1) $\Delta_{(x,y)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y),\ \text{où}(x,y) \in D -$ partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et $\phi_1, \phi_2 -$ fonctions continues sur$D\}$

(2) $\Delta_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ a \leq z \leq b,\ \text{où}(x,y) \in D(z) =$ la projection sur le plan xy de l'intersection de Δ et du plan passant par $(0,0,z)$ et parallèle au plan $xy\}$

(3) $P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, dans ce cas on dit aussi que c'est un pavé de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 127. *(de Fubini) Soit Δ un compact élémentaire de $\mathbb{R}^3$ et $f(x,y,z)$ une fonction continue sur Δ.*

(1) *Si Δ est de type $\Delta_{(x,y)}$ alors*

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(intégration par "piles")

(2) *Si Δ est de type Δ_z alors*

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\iint_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

(intégration par "tranches")

(3) *Si $\Delta = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ alors*

$$\begin{aligned}\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \cdots\end{aligned}$$

En particulier, le volume de Δ est l'intégrale triple sur Δ de la fonction 1 :

$$\text{Volume de } \Delta = \iiint_\Delta \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Les intégrales triples sont des intégrales de 3-formes différentielles. Pour les 3-formes différentielles on peut calculer ce qui ce passe si on change les variables. Supposons que x, y et z soient des fonctions de variables u, v et w telles qu'on a les formules

$$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w).$$

Ce sont des formules de changement de variables - c'est-à-dire une transformation qui à un point m de coordonnées u, v et w associe le point de coordonnées x, y et z. Le jacobien du changement de variable est le déterminant

$$\left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix}.$$

Alors, si le domaine Δ est transformé par ce changement de variables en Δ', la 3-forme différentielle $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ doit être changée à l'aide du Jacobien et on obtient la formule suivante :

$$\iiint_\Delta f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Delta'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

8.5. **Coordonnées cylindriques. Coordonnées sphériques.** *Prima facie*, les coordonnées cylindriques sont r,t et z telles que

$$x = r\cos t,\ \ y = r\sin t,\ \ z = z,\ \text{ avec } r^2 = x^2+y^2,\quad t\in[0,2\pi[$$

On obtient

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,t,z)}\right| = r$$

Exemple 128. Le volume de la partie Δ du cylindre d'équation $x^2+y^2-ax\le 0$ (où $a>0$) comprise entre le plan xy et le plan d'équation $z=1$ s'obtient grâce à la formule de changement de variables : Δ est transformée par les coordonnées cylindriques en

$$\Delta' = \{(r,t,z)|\ t\in[0,2\pi[,\ \ r\in[0,a\cos t],\ \ z\in[0,1]$$

Alors,

$$\begin{aligned} V = &\iiint_\Delta \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{a\cos t} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\int_0^1 \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\frac{(a\cos t)^2}{2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{a^2\pi}{2}\end{aligned}$$

Les coordonnées sphériques sont (θ,ϕ,r) telles que

(26)

$$\begin{aligned} g\ :\ [0,\pi]\times[0,2\pi]\times[0,+\infty[\ &\to\ \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\phi,r)\ &\mapsto\ g(\theta,\phi,r) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta).\end{aligned}$$

9. Chapitre IX. Courbes et Intégrales curvilignes

9.1. **Courbes de $\mathbb{R}^2$. Théorème des fonctions implicites pour les courbes de $\mathbb{R}^2$.** Une courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ peut être définie de plusieurs façons différentes.

A) Forme explicite $y=f(x)$ où $f: I\to\mathbb{R},\ I\subset\mathbb{R}$,

$$\Gamma = \{(x,y)|\ x\in I\subset\mathbb{R}, y=f(x)\}.$$

Si f est dérivable en $x_0\in I$ alors Γ possède une tangente au point $m_0=(x_0,y_0)$, où $y_0=f(x_0)$. L'équation de cette tangente est

$$y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0).$$

B) Forme paramétrique (cf. Définition 46)

Définition 129. Une partie de $\mathbb{R}^p$, Γ est une courbe s'il existe une application continue γ d'un intervalle $[a,b]\subset\mathbb{R}$ dans $\Gamma\subset\mathbb{R}^p$. Si cette application est bijective, γ est appelé un arc de courbe. Le couple (Γ,γ) est appelé une courbe paramétrée. Si $\gamma(a)=\gamma(b)$ mais $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ pour tous les points $t_1\neq t_2$ de $[a,b]$ la courbe Γ est appelée une courbe fermée ou un circuit fermé.

Les courbes planes sont des courbes dans $\mathbb{R}^2$. Les courbes gauches sont des courbes dans $\mathbb{R}^3$.

Soit

$$\gamma(t) = \begin{cases} x & = g(t) \\ y & = h(t) \end{cases}$$

où $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Alors, la fonction $\gamma(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ sur un intervalle $[a, b]$ définit Γ, une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma = \{(x, y) | x = g(t), y = h(t);\ t \in [a, b]\}.$$

On dit que $\gamma(t) = (g(t), h(t))$ est une représentation paramétrique de la courbe.

La même courbe peut avoir des représentations différentes, par exemple, les paramétrisations

$$\gamma(t) = \begin{cases} x & = t \\ y & = 2t \end{cases},\ t \in [0, 1];\quad \gamma(s) = \begin{cases} x & = s/2 \\ y & = s \end{cases},\ s \in [0, 2]$$

définissent le même segment sur la droite $y = 2x$.

Pour une courbe

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} \qquad \text{sa dérivée} \qquad \gamma'(t) = \begin{cases} g'(t) \\ h'(t) \end{cases}$$

définit un vecteur tangent à la courbe Γ au point $(x, y) = (g(t), h(t))$. Pour écrire l'équation de la tangente à Γ au point donné de la courbe $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, on trouve l'équation de la droite passant par (x_0, y_0) et parrallèle à $(g'(t_0), h'(t_0))$. On l'écrit sous la forme de déterminant d'une matrice

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & g'(t_0) \\ y - y_0 & h'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui donne

$$g'(t_0)(x - x_0) - f'(t_0)(y - y_0) = 0.$$

Si $(g'(t_0), h'(t_0)) = (0, 0)$ la tangente peut exister également, sa pente est $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{h'(t_0)}{g'(t_0)}$ lorsque cette limite existe.

Définition 130. On note Γ^+ un arc d'une courbe avec un sens de parcours indiqué. On dit qu'on choisit l'orientation de Γ quand on choisit le sens de parcours. On dénote par Γ^- un arc d'une courbe qui est le même que Γ^+ mais avec un sens de parcours opposé. Soit $\gamma : [a, b] \to \Gamma$ une paramétrisation de Γ. On dit que γ est compatible avec l'orientation de Γ^+ si le point $\gamma(t)$ se déplace dans le sens de parcours de Γ lorsque le paramètre croît de a à b.

Exemple 131. Soit Γ une partie de la droite $y = x$ sur l'intervalle $[0, 2]$ parcourue du point $(2, 2)$ vers le point $(0, 0)$. Deux paramétrisations

$$t \in [0, 2],\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \text{ et } \mu(t) = \begin{pmatrix} 2 - t \\ 2 - t \end{pmatrix}$$

se distinguent par l'orientation : μ est compatible avec Γ^+ tandis que γ a une orientation opposée.

C) Forme implicite : par une équation cartésienne

$$\Gamma = \{(x, y) \in D | f(x, y) = 0\} \text{ où } f\ : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2.$$

Dans ce cas, sous certaines conditions, c'est possible de se ramener à la forme explicite. On cherche à exprimer y en fonction de x par $y = \phi(x)$ localement, i.e. au voisinage d'un point de la courbe (x_0, y_0).

Théorème 132. *(Des fonctions implicites pour les courbes.) Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur D. Soit $(x_0, y_0) \in D$ avec*

$$f(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de centre x_0 et $J \subset \mathbb{R}$, un intervalle ouvert de centre y_0, tels que

(1) $\forall x \in I,\ f(x, y) = 0$ *possède une unique solution $y \in J$ notée $y = \phi(x)$ (en particulier $y_0 = \phi(x_0)$).*

(2) *En particulier, $\phi : I \to J$ est dérivable sur I avec*

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

Exemple : $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Pour le point $(x_0, y_0) = (0, 1)$ de la courbe $f(x, y) = 0$ on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2$ - le théorème s'applique, d'où l'existence d'une fonction $\phi : I \to J$. On peut prendre les intervalles $I =]-1, 1[$ et $J =]0, 2[$. Dans ce cas simple on peut expliciter $\phi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Pour la dérivée on vérifie que

$$\phi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}.$$

L'intérêt du théorème réside dans les cas où on ne peut pas expliciter ϕ, mais où néanmoins on peut construire le graphe en utilisant les valeurs des tangentes.

En utilisant la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) \\ &+ \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}) \end{aligned}$$

La ligne de niveau 0 de f définit une courbe implicitement. (x_0, y_0) appartient a cette courbe si $f(x_0, y_0) = 0$. La différentielle en ce point décrit bien le comportement de la courbe :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{27}$$

C'est une équation de la droite tangente. Si on peut résoudre cette équation linéaire par rapport à y (i.e. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$) alors la courbe $f(x, y) = 0$ est proche de la droite (27) dans un voisinage suffisamment petit. On peut espérer pouvoir résoudre $f(x, y) = 0$ comme une relation explicite entre y et x.

Remarque 133. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ le théorème des fonctions implicites appliqué en permutant le rôle de x et y donne une application $\psi : J \to I$ et au voisinage de (x_0, y_0) l'équation de la courbe est $x = \psi(y)$.

9.2. **Droite tangente, plan normal à une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$.** Une courbe paramétré dans l'espace, appelée aussi "courbe gauche", est donnée par une application vectorielle :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Le vecteur directeur de la droite tangente au point de la courbe $(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ est donné par la dérivée de γ :

$$\overrightarrow{\gamma'}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}.$$

La droite tangente T passe par (x_0, y_0, z_0) et parallèle au vecteur $\gamma'(t_0)$. Cela signifie que chaque vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ passant du point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ au point $P = (x, y, z) \in T$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$. En coordonnées cela donne l'équation de la droite :

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & = & kx'(t_0) \\ y - y_0 & = & ky'(t_0) \\ z - z_0 & = & kz'(t_0) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

k est ici un coefficient de proportionnalité entre les vecteurs $\overrightarrow{P_0P}$ et $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$. Cette variable k dépend de la position du point P sur la droite et quand k parcourt $\mathbb{R}$, le point P parcourt la droite tangente. Si toutes les coordonnées de $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$ sont non-nulles on peut réécrire l'équation de la droite sans k :

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \tag{28}$$

Le plan normal, orthogonal à la courbe au point de la courbe (x_0, y_0, z_0), ce qui en pratique signifie orthogonal à la tangente en ce point, est donné par la relation suivante :

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Ici on utilise le produit scalaire de la tangente et du vecteur $\overrightarrow{P_0Q}$, passant du point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ au point $Q = (x, y, z)$ du plan. Le plan est normal quand le produit scalaire $\overrightarrow{\gamma'}(t_0) \cdot \overrightarrow{P_0Q}$ vaut 0.

Exemple 134. Cherchons les équations de la tangente et du plan normal à la courbe donnée par les relations paramétrique :

$$x = t, \; y = t^2, \; z = t^3$$

au point $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, $t = 1$. On a $x' = 1$, $y' = 2t$, $z' = 3t^2$, donc au point $(1, 1, 1)$, le vecteur directeur de la tangente est égal à $(1, 2, 3)$. L'équation de la tangente est

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2} = \frac{z - z_0}{3}$$

et celle du plan normal

$$1 \cdot (x - x_0) + 2 \cdot (y - y_0) + 3 \cdot (z - z_0) = 0.$$

Dernière remarque ici à propos de la dimension. La droite est un objet de dimension 1, donc pour écrire une équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$ il faut deux relations linéaires indépendantes, car $1 = 3 - 2$. Quand on utilise une variable supplémentaire k pour écrire une équation d'une droite, on a 4 variables et 3 relation linéaires : $4 - 3 = 1$.

Un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est donné par une seule équation linéaire, du point de vue de la dimension car la dimension du plan est $2 = 3 - 1$.

9.3. **Longueur d'une courbe. Abscisse curviligne.** Un arc de courbe est orienté par le choix de l'un des deux sens de parcours possible, ce qui revient à distinguer les vecteurs tangents opposés $\pm\overrightarrow{\gamma'}(t)$. Pour calculer la longueur d'un arc de la courbe Γ on partage la courbe en n morceaux et on cherche la somme des longueurs. Quand $n \to \infty$ les morceaux de la courbe deviennent petits et presque des segments donc

$$\sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{M_iM_{i+1}}\| = \sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{\gamma}(t_{i+1}) - \overrightarrow{\gamma}(t_i)\| \approx \sum_{i=1}^{n} \| \overrightarrow{\gamma}'(t_i) \| (t_{i+1} - t_i).$$

on peut substituer à la longueur d'un morceau M_iM_{i+1} la longueur du vecteur tangent $\|\overrightarrow{\gamma}'(t_i)\|$ au point $M_i = \gamma(t_i)$. En considérant des subdivision de plus en plus fines et en passant à la limite en $n\infty$ on obtient la sommation continue qui définit la longueur : l'arc de courbe Γ donné par la parametrisation $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ a pour longueur

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|\overrightarrow{\gamma'}(t)\| dt.$$

Théorème 135. *La longueur d'un arc d'une courbe est bien définie - elle ne dépend pas de la paramétrisation.*

Soit $p : [u_d, u_f] \to [a, b]$, $p(u) = t$ une fonction dérivable $p'(u) \neq 0$, pour $u \in [u_d, u_f]$, et $a = p(u_d), b = p(u_f)$. On a le même arc de courbe Γ avec une nouvelle représentation paramétrique $\mu(u) = \gamma(p(u))$. Montrons que $L(\Gamma) = \int_{u_d}^{u_f} |\mu'(u)| du$. En effet,

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$$

$$L(\Gamma) = \int_{u_d}^{u_f} \|\mu'(u)\| du = \int_{u_d}^{u_f} \left\|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right\| du = \int_{u_d}^{u_f} \left\|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right\| \left(\left\|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right\| du\right) = \int_a^b \left\|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right\| \mathrm{d}t.$$

On pose $\mathrm{d}s = |\overrightarrow{\gamma}'t|\ \mathrm{d}t = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t$. On l'appelle l'abscisse curviligne car cette forme différentielle joue le même rôle dans les intégrales sur les courbes que $\mathrm{d}x$ sur les intégrales simples sur un intervalle.

Remarque 136. Dans $\mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée est donnée par

$$\gamma(t) = \left\{ \begin{array}{ll} x = & x(t) \\ y = & y(t) \end{array} \right. , \quad \gamma'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} x' = & x'(t) \\ y' = & y'(t) \end{array} \right. , \quad \|\overrightarrow{\gamma}'(t)\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Si la courbe est donnée par l'équation $y = f(x)$, alors

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad \|\overrightarrow{\gamma}'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}.$$

9.4. **Intégrale curviligne d'une fonction.**

Définition 137. Soit f une fonction continue sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ contenant une courbe Γ, $t \in [a,b]$. L'intégrale curviligne de f sur Γ est définie par

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,\|\overrightarrow{\gamma}'(t)\|\ \mathrm{d}t$$

Exemple 138. Soit Γ le cercle dans le plan $z=1$ de centre $(0,0,1)$ et de rayon $R>0$. On choisit une représentation paramétrique, pour $t \in [0,2\pi[$

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = & R\cos t \\ y(t) = & R\sin t \\ z(t) = & 1 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\gamma}'(t) = \begin{cases} x'(t) = & -R\sin t \\ y'(t) = & R\cos t \\ z'(t) = & 0 \end{cases}$$

On a $\quad |\overrightarrow{\gamma}'(t)| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R$. La longueur du cercle

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} |\overrightarrow{\gamma}'(t)|\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}t = 2\pi R$$

Soit $f(x,y,z) = x^2 = y^2 + z^2$. Sa restriction sur le cercle est

$$f(x,y,z)\|_\Gamma = f(R\sin t, R\cos t, 1) = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t + 1 = R^2+1$$

et finalement l'intégrale curviligne vaut

$$I = \int_0^{2\pi} (1+R^2)R\,\mathrm{d}t = 2\pi(1+R^2)R$$

9.5. **Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs = intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle.**

Soit $\overrightarrow{V} : D \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs continu sur une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ contenant une courbe Γ de paramétrisation $\gamma(t) : [a,b] \to \Gamma$.

Définition 139. L'intégrale

$$I = \int_a^b \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t \tag{29}$$

du produit scalaire de $\overrightarrow{V}(\gamma(t))$ et du vecteur tangent à la courbe Γ au point $\gamma(t)$: $\overrightarrow{\gamma}'(t)$ est appelé l'intégrale curviligne d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$.

L'intégrale (29) est indépendante de toute paramétrisation compatible avec l'orientation de Γ^+. Cette intégrale est souvent notée

$$I = \int_{\Gamma^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\tau}\,\mathrm{d}s$ est le "vecteur de l'abscisse curviligne" - le vecteur unitaire $\overrightarrow{\tau}$ étant le vecteur-directeur de la tangente au point donné de la courbe. Le vecteur $\overrightarrow{\tau}$ est orienté dans le sens de parcours de la courbe. En particulier, si $\overrightarrow{V} = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$

$$I = \int_{\Gamma^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \tag{30}$$

- c'est une intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle α formellement correspondante au champ de vecteur coordonnée par coordonnée :

$$\overrightarrow{V} = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j} \rightsquigarrow \alpha = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

Exemple 140. Soit γ - l'arc de la parabole $y = x^2$ sur un segment $[-2, 2]$ et $\overrightarrow{V} = -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$. On peut calculer de deux façon différentes l'intégrale $I = \int_{\Gamma^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$.

<u>Première façon - via $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$</u>

A la place de champ de vecteur $-y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ on écrit une 1-forme différentielle $-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$. Donc l'intégrale curviligne devient

$$I = \int_{\Gamma^+} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

On choisi une représentation $\gamma : [-2, 2] \to \Gamma$ par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \mathrm{d}x = & 1 \cdot \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = & 2t\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Donc

$$I = \int_{\Gamma^+} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} (-t^2)\,\mathrm{d}t + t \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} (t^2)\,\mathrm{d}t = 16/3$$

<u>Deuxième façon - directe via $\mathrm{d}t$</u>

On peut directement calculer l'intégrale par la formule (29) en réécrivant $V(t) = -t^2\,\overrightarrow{i} + t\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{\gamma}'(t) = 1\,\overrightarrow{i} + 2t\,\overrightarrow{j}$:

$$I = \int_{-2}^{2} \overrightarrow{V}(t) \cdot \overrightarrow{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} (-t^2 \cdot 1 + t \cdot 2t)\,\mathrm{d}t = 16/3.$$

Propriété 141. Propriétés de l'intégrale curviligne

– Si Γ^- est un chemin avec une orientation opposée à Γ^+

$$\int_{\Gamma^-} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = -\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

– Soit $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ la réunion de deux arcs de classe C^1. Le choix d'orientations pour Γ_1 et Γ_2 fournit l'orientation pour leur réunion. On définit alors

$$\int_{\Gamma_1^+ \bigcup \Gamma_2^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\Gamma_1^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} + \int_{\Gamma_2^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

Remarque 142. Sens physique d'une intégrale curviligne : si $\overrightarrow{V}(M)$ représente une force variable appliquée au point M du chemin Γ^+, l'intégrale I est le travail de la force V nécessaire pour déplacer une particule unitaire le long du chemin Γ^+. L'intégrale curviligne du champ V sur Γ^+ est aussi appelé la <u>circulation</u> du champ V sur Γ^+.

9.6. **Théorème de Poincaré et intégrale curviligne.** Le théorème de Poincaré parle des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteurs soit un champ de gradient (Théorème 101) ou pour qu'une forme fermée soit exacte (Théorème 113). L'intégrale curviligne d'un champ de gradient a des propriétés particulières, à savoir :

Proposition 143. L'intégrale curviligne de champ de gradient $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ le long d'un arc de courbe d'extremités A et B est égale à $f(B) - f(A)$.

Démonstration. Montrons la proposition dans $\mathbb{R}^2$. Le champ

$$\overrightarrow{V}(x, y) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j}$$

définit l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\Gamma^+} \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ une paramétrisation compatible de Γ^+. En particulier $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$. La restriction de la forme $\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$ sur Γ^+ nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{d}f(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}f \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_a^b \mathrm{d}f = [f(x(t), y(t))]_a^b = f(B) - f(A).$$

□

L'intégrale ne dépend donc que des extremités du chemin d'intégration Γ^+ pas du chemin lui-même.

Proposition 144. Les propriétés suivantes d'un champ $\overrightarrow{V}$ de vecteurs sont équivalentes :
- Il existe une fonction f telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$
- Il existe une fonction f telle que $\overrightarrow{V} \cdot \mathrm{d}s = \mathrm{d}f$
- La circulation de $\overrightarrow{V}$ d'un point A au point B est indépandente du chemin. Elle ne dépend que de A et de B.
- La circulation du champ $\overrightarrow{V}$ le long de tout chemin fermé est nulle.

Exemple 145. Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs défini sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$\overrightarrow{V}(x, y) = P(x, y)\,\overrightarrow{i} + Q(x, y)\,\overrightarrow{j}, \quad \text{où} \quad P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

On vérifie que $\overrightarrow{V}$ satisfait la condition nécessaire pour être un champ de gradient :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

On calcule la circulation de $\overrightarrow{V}$ sur le cercle unité C^+ paramétré comme suit :

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi],\ x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t.$$

Dans cette paramétrisation les différentielles sont $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = \cos t\,\mathrm{d}t$ et les coordonnées du champ $\overrightarrow{V}$

$$P(x(t), y(t)) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin t}{1}, \quad Q(x(t), y(t)) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos t}{1}$$

Finalement, l'intégrale curviligne $\int_{C^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ se calcule

$$\int_0^{2\pi} -\sin t(-\sin t)\,\mathrm{d}t + \cos t \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$$

et s'avère ne pas être nulle. Par la Proposition 144, cela implique que ce champ $\overrightarrow{V}$ n'est pas un champ de gradient car la circulation le long du chemin fermé (le cercle C^+) n'est pas nulle !

Par le théorème de Poincaré on aurait pu anticiper cela car Ω, le domaine de définition de champ $\overrightarrow{V}$ n'est pas simplement connexe (Définition 99). En effet, le cercle C^+ est un chemin autour du point $(0,0)$. Ce point étant exclu du domaine Ω, on ne peut pas ramener C^+ à un point tout en restant dans Ω.

10. Chapitre X. Théorèmes de Stokes : Green-Riemann, Ostrogradski...

10.1. **Théorème de Green-Riemann.** Parfois on utilise la notation $\oint$ pour une intégrale sur une courbe fermée pour soulignier que le circuit est fermé.

Théorème 146 (Green-Riemann)**.** *Soit D un compact de $\mathbb{R}^2$ limité par un bord $C = \partial(D)$ de classe C^1 par morceaux et $P, Q : D \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1. On a*

$$\oint_{C^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{31}$$

où C^+ designe le bord C, orienté de sorte qu'un mobile parcourant C a toujours D à sa gauche.

Démonstration. D'abord on donne ici une démonstration dans le cas le plus simple. Soit D un carré R de sommets $(0,0), (1,0), (1,1)$ et $(0,1)$ et supposons $Q = 0$. On cherche à démontrer

$$\oint_{\partial R} P\,\mathrm{d}x = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Côté gauche de l'égalité Pour calculer l'intégrale curviligne $\int_{\partial R} P\,\mathrm{d}x$ on oriente le bord du carré ∂R contre l'aiguille du montre. On note le coté de R allant du sommet $(0,0)$ vers $(1,0)\Gamma_1$, de $(1,0)$ vers $(1,1) - \Gamma_2$, etc. Le bord du carré $\partial R = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3 \bigcup \Gamma_4$. On peut paramétré les cotés Γ_i o de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll}
\gamma_1 : [0,1] \to \Gamma_1, & t \mapsto (t,0) & \mathrm{d}x = 1 \cdot \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y = 0 \cdot \mathrm{d}t \\
\gamma_1 : [0,1] \to \Gamma_2, & t \mapsto (1,t) & \mathrm{d}x = 0 \cdot \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y = 1 \cdot \mathrm{d}t \\
\gamma_1 : [0,1] \to \Gamma_3, & t \mapsto (1-t,1) & \mathrm{d}x = 1 \cdot \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y = 0 \cdot \mathrm{d}t \\
\gamma_1 : [0,1] \to \Gamma_4, & t \mapsto (0,1-t) & \mathrm{d}x = 0 \cdot \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y = 1 \cdot \mathrm{d}t
\end{array}$$

$$\oint_{\partial R} P\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_1} P\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} P\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_3} P\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_4} P\,\mathrm{d}x$$

On a

$$\begin{array}{ll}
\int_{\Gamma_1} P(x,y)\,\mathrm{d}x & = \int_0^1 P(t,0)\,\mathrm{d}t, \\
\int_{\Gamma_2} P(x,y)\,\mathrm{d}x & = \int_0^1 P(1,t)0 \cdot \mathrm{d}t = 0, \\
\int_{\Gamma_3} P(x,y)\,\mathrm{d}x & = \int_0^1 P(1-t,1)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 P(t,1)\,\mathrm{d}t, \\
\int_{\Gamma_4} P(x,y)\,\mathrm{d}x & = \int_0^1 P(0,1-t)0 \cdot \mathrm{d}t = 0
\end{array}$$

Finalement le côté gauche est égal à

$$\int_0^1 P(t,0)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 P(t,1)\,\mathrm{d}t$$

Côté droit de l'égalité

On calcule l'intégrale double par Fubini :

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = -\int_0^1 (P(x,1) - P(x,0))\,\mathrm{d}x$$

ce qui est exactement le côté gauche obtenu précédemment !

Il est clair qu'on démontre de la même façon que
$$\oint_{\partial R} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
La démonstration se généralise facilement sur n'importe quelle partie quarrable de $\mathbb{R}^2$. □

Remarque 147. L'intégrale curviligne du champ $\overrightarrow{V}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ est l'intégrale de la 1-forme différentielle correspondante
$$\alpha = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$
On remarque que la 2-forme
$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
est égale à $\mathrm{d}\alpha$. La formule de Green-Riemman dans cette écriture devient

$$\oint_{\partial(D)} \alpha = \iint_D \mathrm{d}\alpha. \tag{32}$$

Exemple 148. Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée C constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ décrite dans le sens direct avec
$$I = \int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy.$$
Vérifier le résultat en utilisant la formule de Riemann.

Important ! La formule de Green-Riemann marche seulement dans des domaines fermés et bornés par une courbe fermée - on n'a pas de formule reliant les intégrales doubles aux intégrales curvilignes sur un chemin quelconque. La formule de Green-Riemann est vraie seulement pour des chemins fermés.

10.2. **Applications (calcul d'aire, théorème de Poincaré).** L'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ grâce au théorème de Green-Riemann s'exprime par une intégrale curviligne
$$AireD = \int_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_{\partial(D)} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = -\oint_{\partial(D)} y\,\mathrm{d}x = \oint_{\partial(D)} x\,\mathrm{d}y$$

Exemple 149. Soit D le domaine défini entre la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 4$. On cherche l'aire de D. On peut la trouver en calculant l'intégrale curviligne de champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j}$. Le bord est une réunion de Γ et Γ_1 où Γ est la parabole de paramétrisation $(t, t^2), t \in [-2, 2]$ et Γ_1 la droite de paramétrisation $(2 - t, 4)$. De l'exemple 140 on a
$$I = \oint_{\Gamma^+} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} (-t^2)\,\mathrm{d}t + t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} (t^2)\,\mathrm{d}t = 16/3$$
et sur la droite Γ_1 on a $x = 2 - t,\ y = 4$, donc $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t,\ dy = 0\cdot\ dt$ et
$$I = \int_{\Gamma_1^+} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} (-4)(-\mathrm{d}t) + (2-t)(0\cdot\ \mathrm{d}t) = \int_{-2}^{2} 4\,\mathrm{d}t = 16$$
Le résultat pour l'intégrale curviligne sur le chemin fermé est
$$\int_{\Gamma\bigcap\Gamma_1} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \frac{16}{3} + 16 = \frac{64}{3}.$$

On vérifie que
$$\oint_{\Gamma\bigcup\Gamma_1} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
On a
$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$
ce qui est exactement la moité de l'intégrale curviligne.

Soit la forme différentielle $\alpha = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ sur $D \subset \mathbb{R}^2$ fermée. C'est-à-dire que
$$\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$
Par la formule de Green-Riemann (31) on voit que cela implique que
$$\oint_{C^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$
et cela sur n'importe quel chemin fermé C^+. La seule condition sur C^+ est que le chemin C^+ doit être le bord d'un domaine quelconque D !

La formule de Green-Riemann éclaire un autre côté du théorème de Poincaré - une 1-forme fermée sur un domaine D a son intégrale sur toute courbe fermée contenue dans D égale à zero. Par conséquent elle est exacte (cf. 141). Par exemple, pour la forme
$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$
on arrive en changeant des variables en coordonnées polaires $(x, y) \to (r, t)$:
$$x = r\cos t,\ \ y = r\sin t$$
à obtenir
$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}r\cos t - r\sin t\,\mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}y = \mathrm{d}r\sin t + r\cos t\,\mathrm{d}t \text{ et par conséquent } \omega = \mathrm{d}t.$$
Il apparaît que ω est exacte par cette formule ! Or si on calcule son intégrale sur un circuit fermé autour de l'origine comme on a fait dans l'exemple 145 on voit que l'intégrale n'est pas nulle et par conséquent la forme n'est pas exacte. Ce qui est correct c'est que ω est exacte localement, mais pas globalement, partout dans $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Le plus grand ouvert sur lequel on peut obtenir le changement de variables continu $(x, y) \to (r, t)$ est le complémentaire dans le plan $\mathbb{R}^2$ d'une demi-droite issue de l'origine, mais pas le plan entier ni le plan privé de l'origine.

10.3. **Surfaces. Intégrale de surface de fonctions réelles.** L'idée de base est la même que pour les intégrales curvilignes, mais au lieu d'intégrer sur un arc de courbe on intègre sur une surface. C'est par une intégrale de surface qu'on calcule

– l'aire d'une surface (l'aire d'une sphère, par exemple)
– le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Une surface S de $\mathbb{R}^3$ peut être définie de différentes façons :

– a) Forme explicite par une équation de la forme $z = f(x, y)$ où $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$,
$$S = \{(x, y, z)|\ (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}.$$
Une paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$ en est un exemple.

– b) <u>Forme implicite</u> par une équation de la forme $F(x,y,z) = 0$ où $F : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^3$,

$$S = \{(x,y,z) \in E \subset \mathbb{R}^3 |\ F(x,y,z) = 0\}.$$

La sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre l'origine et de rayon R en est un exemple :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

– c) <u>Forme paramétrique</u> par une représentation paramétrique

$$\begin{array}{rcl} g\ : D \subset \mathbb{R}^2 & \to & S \subset \mathbb{R}^3, \\ (u,v) & \mapsto & g(u,v) = (x,y,z) \end{array}$$

Exemple 150. S - une sphère de centre l'origine et de rayon R

$$\begin{array}{rcl} g\ : [0,\pi] \times [0,2\pi] & \to & S \subset \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\phi) & \mapsto & g(\theta,\phi) = (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta) \end{array} \tag{33}$$

Soit m le point de S de paramètres θ et ϕ.

– (a) Lorsque ϕ est fixé et que θ varie dans $[0,\pi]$ m décrit un demi-cercle. Un vecteur-tangent à ce demi-cercle au point m est

$$\overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \theta}} = (R\cos\theta\cos\phi, R\cos\theta\sin\phi, -R\sin\theta)$$

– (b) Lorsque θ est fixé et que ϕ varie dans $[0,2\pi]$, m décrit un cercle. Un vecteur-tangent à ce cercle au point m est

$$\overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \phi}} = (-R\sin\theta\sin\phi, R\sin\theta\cos\phi, 0)$$

On note

$$\overrightarrow{N}(\theta,\phi) = \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \theta}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \phi}},$$

ce vecteur s'il est non nul est normal à la sphère au point m. Le point $m \in S$ est appelé un <u>point régulier</u> de la surface si ce vecteur est non nul en m.

On a une situation analogue pour une surface quelconque paramétrée par

$$\begin{array}{rcl} g\ : D \subset \mathbb{R}^2 & \to & S,\ \text{de classe } C^1 \\ (u,v) & \mapsto & g(u,v) = (x,y,z) \end{array}$$

On considère D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ et g de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant D. On note

$$\overrightarrow{N}(u,v) = \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial u}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial v}},$$

ce vecteur s'il est non nul est normal à la surface S au point (u,v).

La notion d'aire de la surface paramétrée par $\overrightarrow{g}(u,v)$ avec $(u,v) \in D$ vient de la considération suivante. La surface peut être fractionnée en un nombre fini de parties associées à des rectangles $R_{ij} = [u_i, u_i + \Delta_i u] \times [v_j, v_j + \Delta_j v]$ du plan de paramètres (u,v). L'aire de la portion de surface correspondant à R_{ij} sera approchée par l'aire d'un rectangle de cotés

$$\overrightarrow{g}(u_i, v_j + \Delta_j v) - \overrightarrow{g}(u_i, v_j) \approx \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial v}\Delta_j v \ \text{ et } \overrightarrow{g}(u_i + \Delta_i u, v_j) - \overrightarrow{g}(u_i, v_j) \approx \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial u}\Delta_i u.$$

Il en résulte :

$$\mathcal{A} = \sum_{i,j} \|\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial v}\| \Delta_i u \Delta_j v.$$

Ce qui, après des fractionnements de plus en plus fins, aboutit à la définition précise de l'aire avec une intégrale double. On note

$$\mathrm{d}A = \|\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial v}\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

et on l'appelle l'élément d'aire.

Voici un cas particulier : quand la surface est le graphe d'une fonction d'équation $z = h(x, y)$, on a :

$$\mathrm{d}A = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \overrightarrow{h}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overrightarrow{h}}{\partial y}\right)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Soit $f : U \to \mathbb{R},\ U \subset \mathbb{R}^3$ et $S \subset U$. On a

$$\begin{array}{rccc} f \circ g & : D \subset \mathbb{R}^2 & \to S \subset U \subset \mathbb{R}^3 \to & \mathbb{R}, \\ & (u, v) & \longmapsto & f(g(u, v)). \end{array}$$

On peut considérer l'intégrale double

$$I = \iint_D f(g(u, v)) \|\overrightarrow{N}(u, v)\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

et démontrer que I est indépendante du choix de la représentation paramétrique g. Pour calculer l'intégrale d'une fonction sur une surface on note

$$I = \iint_S f \mathrm{d}A$$

et on l'appelle intégrale de f sur la surface S.

En particulier, lorsqu'on prend pour f la fonction constante égale à 1 on obtient par définition l'aire de S notée

$$\mathcal{A}(S) = \iint_S \mathrm{d}A$$

Après le choix d'une représentation paramétrique de S on calcule $\mathcal{A}(S)$ par

$$\mathcal{A}(S) = \iint_D \|\overrightarrow{N}(u, v)\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Exemple 151. Sur la sphère de rayon R, la calotte sphérique S est l'ensemble des points de coordonnées sphériques (R, θ, ϕ) tels que $0 \leq \theta \leq \alpha$. S a la représentation paramétrique donnée par l'équation (33) de l'exemple 150. Le vecteur normal est

$$\overrightarrow{N}(\theta, \phi) = \frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial \theta} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial g}}{\partial \phi} = (R^2 \sin^2 \theta \cos \phi, R^2 \sin^2 \theta \sin \phi, R \sin \theta \cos \theta), \tag{34}$$

et

$$\|\overrightarrow{N}(\theta, \phi)\| = R^2 \sin \theta.$$

L'aire de la calotte vaut donc

$$\mathcal{A}(S) = \iint_{0 \leq \theta \leq \alpha,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi} R^2 \sin \theta \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}\phi = R^2 \int_0^\alpha \sin \theta \ \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \ \mathrm{d}\phi = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)$$

En particulier, pour $\alpha = \pi,\ S$ est la sphère et son aire est $4\pi R^2$.

Remarque 152. On remarque que si on change des variables par exemple, $\{x, y\}$ en $\{u, v\}$ c'est exactement comme dans la section 8.3, la 2-forme :

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$$

et on a le même type de formule pour $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$. Le produit vectoriel :

$$\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

Finalement,

$$\mathrm{d}A = \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial v} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \tag{35}$$

10.4. **Intégrale de surface d'un champ de vecteurs.** Soit S une surface comportant deux faces distinctes. Elle est dite orientable.

En chaque point régulier, il existe deux vecteurs unitaires normaux opposés. Le choix d'un de ces vecteurs $\overrightarrow{n}^+$ oriente la surface S.

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs continu sur S. Le flux d'un champ $\overrightarrow{V}$ à travers S est l'intégrale de surface

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}^+ \,\mathrm{d}A$$

On peut noter $\overrightarrow{n}^+ \,\mathrm{d}A = \overrightarrow{\mathrm{d}A}$. De (35) on a

$$\overrightarrow{\mathrm{d}A} = \overrightarrow{k}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \overrightarrow{i}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \overrightarrow{j}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

Pour un champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$ et une surface S définie par $g(u,v) = (x,y,z),\ (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^3$.

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}A} = \iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{36}$$

Formule de la divergence - relie le flux de champ à travers une surface fermée à l'intégrale triple de divergence de ce champ sur le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par cette surface. Soit E un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $S = \partial(E)$ la surface qui est le bord de E. Alors, la formule de la divergence (aussi appelée Ostrogradski et dans le contexte éléctromagnétique - Gauss) est la suivante

$$\iint_{\partial E} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}A} = \iiint_E \mathrm{div}\overrightarrow{V}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{37}$$

Exemple 153. Vérifions la formule d'Ostrogradski avec E - boule de $\mathbb{R}^3$ de centre $O = (0,0,0)$ et de rayon R et $\overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$ champ de vecteurs de composantes $P = x,\ Q = y,\ R = 2z$. La frontière de E est la sphère S de centre O et de rayon R. On peut prendre la paramétrisation paramétrique de sphère (33) avec le vecteur normal $\overrightarrow{N}(\theta,\phi)$ (34). Ce vecteur est dirigé vers l'extérieur, donc on note S^+ la sphère orientée ainsi.

$$I = \iint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{N}(\theta,\phi)\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

On a

$$\overrightarrow{V}(g(\theta,\phi)) = (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, 2R\cos\theta),$$

son produit scalaire avec

$$\overrightarrow{N}(\theta,\phi) = (R^2\sin^2\theta\cos\phi, R^2\sin^2\theta\sin\phi, R\sin\theta\cos\theta)$$

est égal à $R^3(\sin\theta+\cos^2\theta\sin\theta)$. Finalement, l'intégrale recherchée est :

$$I = R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}(\sin\theta+\cos^2\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{16\pi R^3}{3}$$

D'autre part $\operatorname{div}\overrightarrow{V} = \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z} = 4$. L'intégrale triple

$$\iiint_E \operatorname{div}\overrightarrow{V}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4\iiint_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4\ \text{Volume}(E) = 4\times\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{16\pi R^3}{3}.$$

<u>Formule du rotationnel</u> relie l'intégrale curviligne du champ de vecteur sur un circuit fermé avec le flux de rotationel du même champ à travers une surface dont le circuit est le bord. La formule du rotationnel (aussi appelée formule de Stokes) est la suivante

$$\oint_{\partial S=C^+}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint_{S^+}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}A} \tag{38}$$

Autrement dit, la circulation du champ $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe fermé C^+ est égale au flux de rotationnel de $\overrightarrow{V}$ à travers une surface limitée par C^+ (avec l'orientation compatible). Cette formule est une reformulation de la formule de Green-Riemann pour une courbe fermée dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 154. Ca serait bien de faire encore un exemple de calcul par la formule du rotationnel.

10.5. **Formule de Stokes générale : $\int_{\partial(D)}\omega = \int_D d\omega$.**

L'intégration est une opération qui à un domaine de dimension k et à une k-forme différentielle associe un nombre. Des exemples sont

– l'intégrale simple
$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$
- associe un nombre à une 1-forme différentielle $f(x)\,\mathrm{d}x$ sur un segment $I=[a,b]$ de dimension 1.

– l'intégrale double
$$\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
- associe un nombre à une 2-forme différentielle $g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ sur un domaine $D\subset\mathbb{R}^2$

– l'intégrale triple
$$\iiint_E h(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
associe un nombre à une 3-forme différentielle $h(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ sur un domaine $E\subset\mathbb{R}^3$

– l'intégrale curviligne
$$\int_\Gamma p(x,y)\,\mathrm{d}x+q(x,y)\,\mathrm{d}y$$
associe un nombre à une 1-forme différentielle $p(x,y)\,\mathrm{d}x+q(x,y)\,\mathrm{d}y$ sur une courbe $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ ou bien
$$\int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

associe un nombre à une 1-forme différentielle $P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ sur une courbe $C \subset \mathbb{R}^3$. Une courbe étant un objet de dimension 1 cela est possible.

– l'intégrale de surface

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(z,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

associe un nombre à une 2-forme $P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z{+}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x{+}R(z,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans $\mathbb{R}^3$ sur une surface $S \in \mathbb{R}^3$, objet de dimension 2.

Soit D un domaine fermé et borné de dimension q dans $\mathbb{R}^p$, on note $\partial(D)$ son bord (qui est de dimension $q-1$.) Soit ω une $(q-1)$-forme dans $\mathbb{R}^p$ (Définition 106). Alors, la formule de Stokes générale est satisfaite :

$$\int_{\partial(D)} \omega = \int_D d\omega \tag{39}$$

Les cas spéciaux de cette formule sont :

– $q = 1,\ p = 1$ - c'est le théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_a^b \mathrm{d}f = f(b) - f(a)$$

– $q = 2,\ p = 2$ - théorème de Green-Riemann
– $q = 2,\ q = 3$ - théorème de Stokes (du rotationnel)
– $q = 3,\ q = 3$ - théorème d'Ostrogradski (de la divergence)

La formule (39) donne une formulation élégante de plusieurs théorèmes.

Elle présente une connection entre l'opération géométrique ∂ qui à un domaine D associe son bord $\partial(D)$ et l'opération algébrique - d qui à une forme différentielle ω associe une forme différentielle $d\omega$. Selon la formule (39) ces deux opérations sont en dualité !

Il faut remarquer que ∂, l'opération de prendre le bord, est différente de la notion topologique de prendre la frontière. La notion de l'intérieur change avec la dimension, à savoir, si on regarde un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ son intérieur est un segment ouvert $]a,b[$ et sa frontière est deux points $\{a,b\}$. Le même segment dans $\mathbb{R}^2$ n'a pas de points d'intérieur ! Tous les points de $[a,b]$ sont des points frontière.

Ici, soit D un domaine de dimension k de $\mathbb{R}^p$. Si D est donné par sa forme paramétrique avec m équations paramétriques avec n variables, sa dimension est $k = p + n - m$.

Par exemple, pour une courbe de $\mathbb{R}^3, \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ il y a $m = 3$ équations

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

sur $p = 3$ variables de $\mathbb{R}^3, (x,y,z)$ qui dépendent d'une variable t, en tout $p + n = 4$ variables, dont une, t, qu'on appelle libre. Donc dans $\mathbb{R}^3$ la dimension d'une courbe est $p + n - m = 1$.

Un autre exemple, une surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$ est donnée par 3 équations sur 5 variables (u,v,x,y,z), dont u,v sont des variables libres et x,y,z s'expriment à partir de u,v. Cela donne que la dimension d'une surface dans $\mathbb{R}^3$ est égale à $2 = 5 - 3$.

Souvent un domaine de dimension $p-1$ dans $\mathbb{R}^p$ est appelé une hypersurface. Pour définir une hypersurface dans $\mathbb{R}^p$ il faut une équation reliant p variables. Ou bien on peut introduire $p-1$ variables libres et avec p équations définir une hypersurface. Une surface de $\mathbb{R}^3$ en est un exemple.

On peut resumer comme suit : la dimension d'un domaine est le nombre minimal de variables indépendantes qui le définissent.

Ce qui suit ces considèrations de dimension, c'est qu'un voisinage Ω d'un point X de D de dimension k dans $\mathbb{R}^p$ peut être de deux types :

$$(1)\ \Omega \simeq U \subset \mathbb{R}^k \text{ ou } (2)\ \Omega \simeq V \subset \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}.$$

Les points de D avec le voisinge de type (1) sont des points intérieurs. Les points de D avec le voisinge de type (2) sont des points du bord. (L'opération de prendre le bord peut aussi être définie à l'aide des simplexes et des chaînes (cf. Chapitre 9 de [3]), ce qui dépasse le programme de ce cours.)

On remarque que $\partial(\partial(D)) = \emptyset$ pour tout domaine D. Cette propriété est en correspondance avec la relation $d(d\omega) = 0$ pour toute forme différentielle ω (Lemme 110). Le théorème de Stokes général dit qu'on peut "échanger" une opération avec l'autre.

C'est un résultat très profond qui relie l'analyse des objets géométriques par des méthodes algébriques. C'est une pierre angulaire de l'analyse moderne.

Références

[1] Niglio, Louis et Fredon, Daniel, *Fonctions de plusieurs variables : rappels de cours, questions de réflexion, exercices d'entraînement*, Dunod, c1998. BU provisoire sciences 515.07 NIG

[2] Rouvière, François *Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation* Cassini, 1999 ou 2003. BU provisoire sciences 510.79 ROU

[3] Rudin, Walter *Principes d'analyse mathématique [Texte imprimé] : cours et exercices* Dunod, 2006. BU Sciences 4ème étage 515.07 RUD

[4] Zorich, Vladimir *Mathematical Analysis I* et *Mathematical Analysis II* Springer 2002, 2007 ou 2008. BUFR Maths Niveau - 1 26 ZORICH