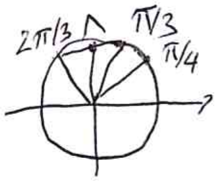
MATHS. Corrigé CC1. 11.10.2017

$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$



Exercice 1.

La distribution de temperature dans le plan est donnée par la fonction

$$T(x,y) = 10 + 6\cos(x)\sin(y) + 3\cos(2x) + 4\cos(2y)$$

2 (1) (a) Trouver les dérivées partielles au point $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

2 (b) Calculer la dérivée directionelle de $T(x,y)$ au point $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ et dans la direction $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1 (2) (a) Soit θ l'angle avec l'axe Ox. On remarque que le vecteur unitaire qui forme cet angle avec l'axe Ox a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. Trouver la dérivée directionelle de $T(x,y)$ au point $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ dans la direction du vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$.

2 (b) Trouver la direction de croissance maximale de la température au point $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

2 (3) Donner une valeur approchée de $T\left(\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right)$.

1(a) $\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = -6\sin x \cdot \sin y - 6\sin 2x$, $\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = -6\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3} - 6\sin 2\cdot\frac{\pi}{3}$

$= -6\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 6\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-\frac{9}{2} - 3\sqrt{3}}$

$\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = 6\cos x\cos y - 8\sin 2x$, $\frac{\partial T}{\partial y}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - 8\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{3}{2} - 4\sqrt{3}}$

1(b) $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} T\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot \operatorname{grad} T\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\left(-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}\right),\left(\frac{3}{2}-4\sqrt{3}\right)\right)$

En effet, $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$ est un vecteur unitaire.

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{9}{2} - 3\sqrt{3} + \frac{3}{2} - 4\sqrt{3}\right) =$

$= \frac{-6-7\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\frac{6}{2}\sqrt{2} - \frac{7}{2}\sqrt{6}$

$= -3\sqrt{2} - \frac{7}{2}\sqrt{6}$

2(a). $D_{(\cos\theta,\sin\theta)} T\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = (\cos\theta, \sin\theta)\left(\left(-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}\right),\left(\frac{3}{2}-4\sqrt{3}\right)\right)$

$\|(\cos\theta,\sin\theta)\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$ $\quad = \cos\theta\left(-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}\right) + \sin\theta\left(\frac{3}{2}-4\sqrt{3}\right)$

2(b) On étudie les extrema de la fonction de 2a: $g(\theta) = D_{(\cos\theta,\sin\theta)} T\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$

$g'(\theta) = -\sin\theta\left(-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}\right) + \cos\theta\left(\frac{3}{2}-4\sqrt{3}\right) = 0$ quand

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}}{\frac{3}{2}-4\sqrt{3}}$ i.e $\tan\theta = \left(\frac{-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}}{\frac{3}{2}-4\sqrt{3}}\right)$. On peut remarquer aussi que c'est direction du gradient $\begin{pmatrix} -\frac{9}{2}-3\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}-4\sqrt{3} \end{pmatrix}$

ou bien $\theta = \arctan\frac{-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}}{3/2-4\sqrt{3}} = \arctan\frac{-19+10\sqrt{3}}{3}$

3. $T\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{\pi}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \underset{\text{Taylor à l'ordre 1}}{\approx} T\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{\partial T}{\partial y}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$(x_0,y_0) = \left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad \left(T(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = T(x_0,y_0) + \frac{\partial T}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)\right)$

$\Delta x = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $\Delta y = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$T\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{\pi}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \approx 10 + 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{9}{2}-3\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{3}{2}-4\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

$= 10 + \frac{6}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{2} - \frac{4}{2} + \frac{9}{2\cdot3\cdot\sqrt{3}} + 1 - \frac{3}{2\cdot3\sqrt{3}} + \frac{4}{3} = 10 - \frac{7}{2} + 1 - \frac{4}{3}$ $\quad \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{22-7}{2} + \frac{4}{3} + 11\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{53+11\sqrt{3}}{6}$ $\left(\approx 7 - \frac{1}{6} + \frac{11\cdot 1{,}7}{6} \approx 10 \text{ pour avoir une idée de nombre}\right)$

Soit $f : R^2 \to R$ la fonction définie sur R^2 par

$$f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

2 (1) Déterminer les points critiques de f sur R^2.

2 (2) Étudier les extrema locaux de f sur R^2.

1 (3) f admet-elle des extrema globaux sur R^2?

(4) On considère le disque $D = \{(x, y) \in R^2 | \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

On note par M (respectivement m) le maximum global (resp. le minimum global) de la restriction de la fonction f à D.

2 (a) Montrer que si $(x_0, y_0) \in D$ et $f(x_0, y_0) = M$ ou $f(x_0, y_0) = m$, alors (x_0, y_0) est un point du bord de D c'est-à-dire que $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

2 (b) Étudier la fonction $g(t) = f(\cos t, \sin t)$.
Indication: on pourra utiliser l'identité $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ pour simplifier l'expression de $g(t)$.

2 (c) En déduire M et m.

(1) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3(1+y^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} 3(x^2-(1+y^2)) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3(x^2-(1+y^2)) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right)$

$\iff \left(\begin{cases} 0-(1+y^2) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 - (1+0) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right) \iff \begin{cases} 1+y^2 = 0 \text{ - pas de solutions réelles!} \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Remarque Les deux équations doivent être satisfaites! Le point (0,0) ne satisfait pas la première équation...

Points critiques: $(-1,0)$ et $(1,0)$

(2) $R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x$, $S = -6y$ alors $RT - S^2 = -36x^2 - 36y^2$ est toujours négatif $\Rightarrow$ tous les pts critiques sont des pts selle!

Ou bien le calcul particulier. $R(-1,0) = -6$, $T(-1,0) = 6$, $S(-1,0) = 0$ $RT - S^2 = -36$ - pt selle $(-1,0)$. $R(1,0) = 6$, $T(1,0) = -6$, $S(1,0) = 0 \Rightarrow RT - S^2 = -36$

$(1,0)$ est aussi un pt selle.

(3) On remarque que pour $y = 0$ $f(x,0) = x^3 - 3x$ et $x^3 - 3x \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$ pas de max. et $\underset{x \to -\infty}{\to} -\infty$ pas de min

Comme la fonction va à $+\infty$ et à $-\infty$ $\Rightarrow$ pas de max ou min globaux sur $\mathbb{R}^2$

Le fait qu'il n'ya pas de extrema locaux ne suffit pas pour conclure qu'il n'y a pas d'extrema globaux. En effet. la fonction $f(t) = e^t$ n'a pas de pt critiques car $f'(t) = e^t$ n'est jamais 0, mais e^t a un min $= 0$ car $e^t \underset{t \to -\infty}{\to} 0$

(4)(a) Une fonction continue sur un compacte atteint son min et son max sur le compacte. Le min et le max se trouve soit parmi les pts critiques soit sur le bord. Ici, les pts critiques sont des pts selle $\Rightarrow$ le max et le min se trouve sur le bord

(4)(b) $g(t) = \cos^3 t - 3\cos t(1 + \sin^2 t) = \cos^3 t - 3\cos t(1 + 1 - \cos^2 t)$

$= 4\cos^3 t - 6\cos t$

On cherche les extrema de $g(t)$ - ce sont des pts où $g'(t) = 0$

$g'(t) = -12 \sin t \cdot \cos^2 t + 6 \sin t = -12 \cdot (\sin t) \cdot (\cos^2 t - \frac{1}{2}) = 0$

$\Rightarrow \sin t = 0$ ou $\cos^2 t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ 4 pts $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x = \cos t$, $y = \sin t$

On a $(x,y) = (1,0)$ et $(x,y) = (-1,0)$ dans ces 6 pts on trouve:

En comparant les valeurs

$f(1,0) = -2$, $f(-1,0) = 2$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}$ et $f\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$

(4)(c) Par 4(a) le max et le min se trouve parmi les extrema sur le bord

En les comparant $M = 2\sqrt{2}$ et $m = -2\sqrt{2}$