2017-18 - Math 5 - CC2 - Corrigé.

Exercice 1. Soit la fonction $f(x) = \frac{e^{-2|x|}}{3}$

1. Calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)(y)$. On peut utiliser la formule obtenue en cours : $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(t) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2t^2}$.
2. Calculer la transofrmée de Fourier réciproque de $\mathcal{F}(f(y))$.
3. En déduire, pour x réel quelconque, la valeur de l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2xz)}{4+z^2}\mathrm{d}z$.

Corrigé:

1. $\mathcal{F}\left(\frac{e^{-2|x|}}{3}\right) \quad \frac{1}{3}\mathcal{F}\left(e^{-2|x|}\right) \underset{a=2}{=} \frac{1}{3}\frac{2\times 2}{2^2+4\pi^2t^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\pi^2t^2}$

2. $\mathcal{F}(f(y)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(y)) = f(y) = \frac{e^{-2|x|}}{3}$ par définition!

3. Transformé de Fourier pour une fonction paire: $\mathcal{F}(g(z))(t) = 2\int_0^{+\infty} g(z)\cos(2\pi t z)dz$

grace au parité on a aussi $2\int_0^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty}$

Dans la fonction $g(z) = \frac{1}{4+z^2}$ on reconnais

$$\frac{2a}{a^2+4\pi^2z^2} = \frac{4\pi^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{(4+z^2)} = \frac{2\cdot(4\pi)}{(4\pi)^2+4\pi z^2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{avec } a=4\pi.$$

Donc
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2xz)}{4+z^2}dz = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\cdot(4\pi)}{(4\pi)^2+4\pi z^2}\cdot\cos 2\pi\left(\frac{x}{\pi}\right)z\,dz$$

$$= \frac{\pi}{2}\mathcal{F}\left(\frac{2\cdot 4\pi}{(4\pi)^2+4\pi z^2}\right)\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}e^{-4\pi\cdot\frac{|x|}{\pi}} = \boxed{\frac{\pi}{2}e^{-4|x|}}$$

$a=4\pi, \quad x \mapsto \frac{x}{\pi}$

Exercice 2. On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ et les formes differentielles dans cet espace. Soit $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}t$ une base dans l'espace des 1-formes $\Omega^1(\mathbb{R}^4)$. On considère une 2-forme

$$\omega = x^2yz\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + t\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (t+x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}t.$$

1. Donner la formule pour d, l'opérateur de de Rham (différentielle extérieure) en dimension 4 et calculer $\mathrm{d}\omega$.
2. Trouver la fonction $g(x,y,z,t)$ dans l'égalité

$$(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}t + \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)\wedge\omega = g(x,y,z,t)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}t.$$

Corrigé : 1. $d = dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z} + dt\frac{\partial}{\partial t}$

$$d\omega = dx\frac{\partial}{\partial x}(t+x)\wedge dy\wedge dt + dy\cancel{\frac{\partial}{\partial y}(t)}\, dz\wedge dx$$
$$+ dz\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz)\, dx\wedge dy + \cancel{dz\frac{\partial}{\partial z}(t+x)}\, dy\wedge dt$$
$$+ dt\cancel{\frac{\partial}{\partial t}(x^2yz)}\, dx\wedge dy + dt\left(\frac{\partial}{\partial t}t\right)\wedge dz\wedge dx$$
$$= dx\wedge dy\wedge dt + x^2y\, dz\wedge dx\wedge dy + dt\wedge dz\wedge dx$$
$$= \boxed{dx\wedge dy\wedge dt + (x^2y)\,dx\wedge dy\wedge dz - dx\wedge dz\wedge dt}$$

2. $(dx\wedge dt + dx\wedge dz)\wedge(x^2yz\,dx\wedge dy + t\,dz\wedge dx + (t+x)\,dy\wedge dt)$

$$= (t+x)\, dx\wedge dz\wedge dy\wedge dt = \boxed{-(t+x)}\, dx\wedge dy\wedge dz\wedge dt$$

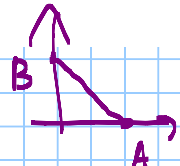
Exercice 3. On considère α, la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ suivante

$$\alpha(x,y) = (4xy+1)\mathrm{d}x + (2x^2-3)\mathrm{d}y.$$

1. Calculer l'intégrale de cette forme différentielle le long L, du segment de droite reliant les points $A=(1,0)$ et $B=(0,1)$ orienté de A vers B.
2. Montrer que cette forme est fermée sur $\mathbb{R}^2$: $\mathrm{d}\alpha = 0, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   En déduire, qu'elle est exacte, c'est à dire qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\omega = \mathrm{d}\phi$ (on ne demande pas de chercher ϕ).
3. Soit Γ la courbe allant de A à B de paramétrisation

$$\begin{cases} x(t) &= \cos^5 t \\ y(t) &= \sin^4 t \end{cases} ;\quad t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

   Quelle est la valeur l'intégrale de la forme α le long de Γ ? Justifier.

1. La droite $A \to B$ 

d'équation $y = -x+1$

paramétrisation : $\begin{cases} x = t \\ y = -t+1 \end{cases}$, $\begin{cases} dx = dt \\ dy = -dt \end{cases}$ $t\in[1,0]$

$$\int_1^0 (4\cdot t\cdot(-t+1)+1)dt + (2t^2-3)\cdot(-dt) = \int (4t^2-4t-1)+2t^2-3)dt$$
$$= \int_0^1 (6t^2-4t-4)dt = \left[6\frac{t^3}{3} - \frac{4t^2}{2} - 3t\right]_0^1 = \frac{6}{3} - \frac{4}{2} - 4 = \boxed{-4}$$

2. $d\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x^2-3) - \frac{\partial}{\partial y}(4xy+1)\right)dx\wedge dy$

$= 4x - 4x = 0$

Une forme fermée sur $\mathbb{R}^2$ est exacte

$d\alpha = 0 \Longrightarrow \exists \varphi$ t.q. $\alpha = d\varphi$.

3. L'intégrale curviligne d'une forme exacte sur un chemin ne depend pas de chemin mais que des extremités. La reponse sera la même que en 1)

Pour compléter on peut calculer φ et obtenir la valeur de l'intégrale en utilisant juste les extremités et pas de paramétrisation de chemin

$$\int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$$

$$\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy, \quad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x^2 - 3 & (1) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 4xy + 1 & (2) \end{cases}$$

$$\varphi(x,y) \overset{(1)}{=} \int (2x^2 - 3)\,dy = 2x^2y - 3y + \psi(x)$$

$$\frac{\partial(2x^2y - 3y) + \psi(x)}{\partial x} \overset{(2)}{=} 4xy + 1$$

$$\Rightarrow \psi'(x) = 1 \Rightarrow \psi(x) = x + \text{con}.$$

$$\varphi(x,y) = 2x^2y - 3y + x + \text{const}$$

$$\int_A^B d(2x^2y - 3y + x) = \left[2x^2y - 3y + x\right]_{(1,0)}^{(0,1)}$$

$$= 2\cdot 0^2\cdot 1 - 3\cdot 1 + 0 - (2\cdot 1^2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 1) = -4$$