2017-18 Math 5 - Contrôle Finale
13.12.2017

Exercice 1.

Écrire la formule de Taylor au second ordre pour la fonction $F(x,y) = (\cos x)^2 \cdot \exp\left((y-1)^2\right)$ au point $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Formule de Taylor fonction $F(x,y)$ en (x_0,y_0) :

Soit $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$

$$F(x_0+h, y_0+k) = F(x_0,y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right) + o(h^2+k^2)$$

En pt. $(0,1)$ $(\sin 0 = 0)$

Ici : $\frac{\partial F}{\partial x} = -2\cos x \cdot \sin x \cdot \exp\left((y-1)^2\right)$ $\quad 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = (\cos x)^2 \, 2(y-1) e^{(y-1)^2}$ $\quad 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = +2\sin^2 x \, e^{(y-1)^2} - 2\cos^2 x \, e^{(y-1)^2}$ $\quad -2$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2\cos x \sin x \cdot (2(y-1)) e^{(y-1)^2})$ $\quad 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (\cos x)^2 \, 2 \cdot e^{(y-1)^2} + (\cos x)^2 \, 4(y-1)^2 e^{(y-1)^2}$ $\quad 2$

alors $F(0+h, 1+k) = 1 + \frac{1}{2}(-2h^2 + 2k^2) + o(h^2+k^2)$

$= 1 - h^2 + k^2 + o(h^2+k^2)$

En autres notations :

$F(x,y) = F(0+x, 1+(y-1)) = 1 - x^2 + (y-1)^2 + o(x^2 + (y-1)^2)$

<u>Remarque</u> : ce n'est pas utile d'ouvrire les parenthèses de $(y-1)^2$ car sinon chaque terme suivant ajoutera une constante –

à l'ordre 1 – F commencera par 1

à l'ordre 2 – ——— par 2

— 3 — " — par 3,

mais la valeur de F est toujours pas loins de 1. Ce n'est pas utile d'écrire les termes suivant qui seront aussi autour de 1. Par contre on peut obtenir le même resultat assez vite des formules

$\cos t =_0 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$ et $e^t =_0 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$\cos^2 x =_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 - x^2 + o(x^2)$

$e^{(y-1)^2} = 1 + (y-1)^2 + o((y-1)^2)$

$\cos^2 x \cdot e^{(y-1)^2} = (1 - x^2 + o(x^2))(1 + (y-1)^2 + o((y-1)^2))$

$= \boxed{1 - x^2 + (y-1)^2 + o(x^2 + (y-1)^2)}$

Exercice 2.

On désire fabriquer une boite de conserves en acièr ayant la forme d'un cylindre. Pour la réaliser on fait la base et la couvercle en forme de disques du rayon a et le côté du cylindre de taille b.

1. Calculer son aire (le coté et les disques ensemble). Notons le $S(a, b)$.

   Indication : on peut penser à étaler le côté du cylindre en rectangle. Les côtés du rectangle ainsi obtenu sont une de longueur b et l'autre de longueur qu'on calcule en utilisant le rayon des disques.
2. Calculer son volume. Notons le $V(a, b)$.
3. On demande que le volume $V(a, b)$ de cette boite soit égal à $0,002 \cdot \pi$ de métres cubiques. Pour optimiser la quantité d'acièr utilisée, on désire que l'aire $S(a, b)$ de la boite cylindrique soit aussi petite que possible. Quelles dimensions a et b doit-on choisir pour fabriquer une telle boite ?

$S = 2 \cdot \pi a^2 + 2\pi a \cdot b$

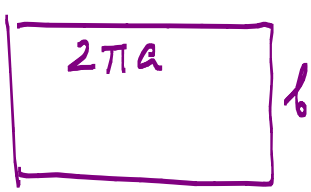
$V = \pi a^2 \times b$

$\pi a^2 b = 0.002\pi$

$\Rightarrow a^2 b = 0.002$

a

b



Deux façons de chercher l'aire minimale :

I methode Exprimer b comme fonction de a de l'eqn. $a^2 b = 0.002$

$b = \frac{0.002}{a^2}$ et le substituer dans S

$f(a) = S\left(a, \frac{0.002}{a^2}\right) = 2\pi a^2 + 2\pi a \cdot \frac{0.002}{a^2} = 2\pi a^2 + \frac{0.004}{a}\pi$

et trouver le min de cette fonction $f(a)$

$f'(a) = 4\pi a - \frac{0.004}{a^2} = 0 \Rightarrow a^3 = 0.001$

$a = 0.1$ — pt. de min.

car a est petit $4\pi a - \frac{0{,}004}{a^2}$ est négative

a		0.1	
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

La reponse $\boxed{a = 0.1}$

$b = \frac{0.002}{0.1^2}$ $\boxed{b = 0.2}$

II méthode : on peut utiliser la méthode de multiplicateurs de Lagrange.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a} = \lambda \frac{\partial S}{\partial a} \\ \frac{\partial V}{\partial b} = \lambda \frac{\partial S}{\partial b} \\ a^2 b = 0.002 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi \cdot 2a \cdot b = \lambda \cdot (4\pi a + 2\pi b) \\ \pi a^2 = \lambda 2\pi a \\ a^2 b = 0.002 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 2\frac{a^2}{2} + ab \\ \lambda = \frac{a}{2} \\ a^2 b = 0{,}002 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = a^2 + \frac{ab}{2} \\ a^2 b = 0.002 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{a}{2}b = 0 \\ a^2 b = 0.002 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a - \frac{b}{2}) = 0 \\ a^2 b = 0.002 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{2} \\ a^2 b = 0.002 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 0{,}1 \\ b = 0.2 \end{matrix}}$$ le même resultat.

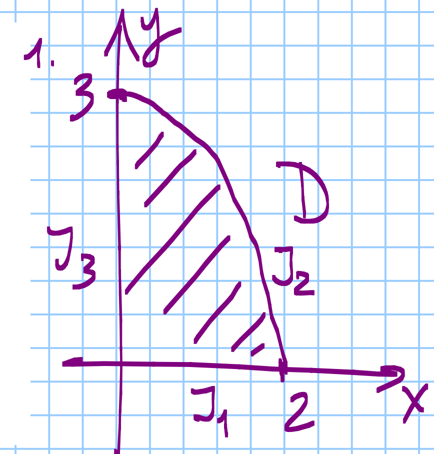
Exercice 3.

Soit l'ensemble

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}.$$

1. Dessiner D.
2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale
$$I = \iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
   (a) en utilisant le changement de variables : $\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$;
   (b) en utilisant la formule de Green-Riemann sur un circuit fermé entourant le domaine d'intégration double.

1.



2a).
$$I = \iint_D (x-y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (2r\cos\theta - 3r\sin\theta)\,6r\cdot dr\,d\theta$$

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \end{cases}$$ $\theta \in [0, \pi/2]$ (car $x>0, y>0$) $r \in [0, 1]$

$dx\,dy = 2 \cdot 3 \cdot r\,dr\,d\theta$

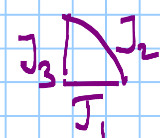
$I = 6\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - 3\cos\theta)\, dt \cdot \int_0^1 r^2\, dr = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot [2\sin\theta + 3\cos\theta]_0^{\pi/2} = \boxed{-2}$

2b) $I = \iint_D (x-y)\, dx\, dy$

Thm. de Green-Riemann : $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{\Sigma = \partial D} P\,dx + Q\,dy$

on présente $x - y = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, on peut prendre par exemple

$Q = 0$ et $P = -\left(xy - \frac{y^2}{2}\right)$



$I = \int_{J_1} + \int_{J_2} + \int_{J_3} \left(-xy + \frac{y^2}{2}\right) dx = \int_{J_2} \left(-xy + \frac{y^2}{2}\right) dx$

car $\int_{J_1} \left(-xy + \frac{y^2}{2}\right) dx = 0$ car $y = 0$ sur J_1

et $\int_{J_3} \left(-xy + \frac{y^2}{2}\right) dx = 0$ car $dx = 0$ sur J_3

Paramétrisation de J_2 – un quart de l'ellipse

$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \qquad \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/2] \quad dx = -2\sin t\, dt$

$\int_{J_3} \left(-xy + \frac{y^2}{2}\right) dx = \int_0^{\pi/2} \left[-2\cos t \cdot 3\sin t\, dt + \frac{(3\sin t)^2}{2}\right](-2\sin t)\, dt$

$= 12 \int_0^{\pi/4} \cos t \sin^2 t\, dt - 9 \int_0^{\pi/4} \sin^3 t\, dt = 12 \int_0^{\pi/4} \sin^2 t\, d(\sin t)$

$- 9 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \sin t\, dt = \left[\frac{12\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi/4} - 9\left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} - 9\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2}$

$= 4 - 9 + 3 = \boxed{-2}$

Exercice 4.

1. On va trouver la formule classique pour la valeur de l'intégrale $I = \int_{\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx$ en passant par coordonnées polaires en dimension deux. Pour cela on regarde le carré de cette intégrale :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy$$
et on utilise les coordonnées polaires pour le calculer. Pour trouver la valeur numérique de l'intégrale géneralisée avec les bornes à l'infinie on utilise les croissances comparées $\lim_{t \to -\infty} |t|^n e^{mt} = 0$ où $m, n \geq 0$.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1}$$

2. On admet sans démonstration que la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-\pi x^2}$ est égale à $\hat{f}(t) = e^{-\pi t^2}$, la même fonction. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction, appelée la gaussienne $G_\delta(x) = e^{-\pi \delta x^2}$ où $\delta \in]0, +\infty[$? Montrer le calcul.

En effet, en coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos t & t \in [0, 2\pi] \\ y = r\sin t & r \in [0, 2\pi] \end{cases}$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2}\underbrace{r\,dr}_{\frac{d(\pi r^2)}{2\pi}}\,dt$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{e^{-\pi r^2}}{2\pi}\right]_0^{+\infty} = \lim_{r\to+\infty}\left(-e^{-\pi r^2}\right) - \left(-e^{-\pi\cdot 0^2}\right) = 1$$

Car $\lim\limits_{r\to+\infty} e^{-\pi r^2} = 0$

2. $\mathcal{F}(G_\delta(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\delta x^2} e^{-2\pi i x t}\,dx$

La transformée de Fourier de $e^{-\pi x^2}$ étant $e^{-\pi t^2}$ on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x t}\,dx = e^{-\pi t^2}$

alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\cdot(\underbrace{\sqrt{\delta}x}_{\text{nouveau } x})^2} \cdot e^{-2\pi i(\sqrt{\delta}x)\cdot\frac{t}{\sqrt{\delta}}}\,\frac{d(\sqrt{\delta}x)}{\sqrt{\delta}}$

$$= e^{-\pi\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\delta}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,e^{-\frac{\pi t^2}{\delta}}}$$

Exercice 5.

On considère l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Déterminer l'équation du plan tangent au point $M(\sqrt{\frac{1}{3}}\,a, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\,c)$.

$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

formule page 9 TD :

Eqn du plan tangent :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

$$\frac{2\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}}{a^2}\left(x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) + 0 + \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}c}{c^2}\left(z - \sqrt{\frac{2}{3}}c\right) = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}\cdot a}x - \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,c}\cdot z - \frac{4}{3} = 0$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{2}}{c} = 3\sqrt{3}}$$

Exercice 6.

A l'aide du théorème d'Ostrogradsky-Gausse (= formule de divergence) calculer l'intégrale $\iint_S \overrightarrow{F}(x,y,z)\mathrm{d}s$ du champs $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x,y,-z)$ à travers d'une sphère S de rayon 1.

$$\operatorname{div}(x,y,-z) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 1$$

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\,ds = \iiint_V 1\,dx\,dy\,dz = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$$

V - volume de la boule à l'interieure de la sphère

Exercice 7.

Calculer l'intégrale triple suivante

$$I = \iiint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{où} \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}.$$

Cette intégrale est nulle par les considération de symmetrie : x est une fonction impaire sur un domaine symétrique autour de l'origine.

Le calcul en coord. sphériques donne :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad dx\,dy\,dz = r\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi \text{ (calculé en TD)}$$

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\varphi\sin\theta\, r\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^1 r^2dr \cdot \int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cdot \underbrace{\left[\sin\varphi\right]_0^{2\pi}}_{=0} \int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \boxed{0}$$