Corrigé de l'Epreuve de Mathématiques I.

3 octobre 2018. Durée : 30 minutes

Exercice

Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur son domaine de définition $D = R\times]0,+\infty[$ par

$$f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$$

(1) Soit (x_0, y_0) un point dans D.

2 (a) Calculer les dérivées partielles de f au point (x_0, y_0).

2 (b) Calculer les dérivées secondes en (x_0, y_0).

2 (c) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction f au point $(x_0, y_0) \in D$.

2 (d) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction f au point $(0, 1)$.

4 (2) Trouver les points critiques de f sur D.

4 (3) Étudier les extrema locaux de f sur D.

4 (4) La fonction f admet-elle les extrema globaux sur D?

- Si oui - lesquels ? - Si non - expliquer pourquoi.

1. a. $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0y_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = x_0^2 + (\ln y_0)^2 + y_0 \cdot 2\ln y_0 \cdot \frac{1}{y_0}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = x_0^2 + (\ln y_0)^2 + 2\ln y_0}$$

1 b. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \underline{2y_0}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underline{2x_0}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \underline{2\frac{\ln y_0}{y_0} + \frac{2}{y_0}}$

1c. $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$ $(h = x - x_0,\ k = y - y_0)$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)h\cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right) + o(h^2+k^2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + 2x_0y_0\cdot h + (x_0^2 + (\ln y_0)^2 + 2\ln y_0)k \\ &+ \frac{1}{2}\left(2y_0h^2 + 2\cdot(2x_0)h\cdot k + \left(2\frac{\ln y_0}{y_0} + \frac{2}{y_0}\right)h^2\right) \\ &+ o(h^2+k^2)\end{aligned}}$$

1d. $$f(0,1) = 0 + 0\cdot h + 0\cdot k + \frac{1}{2}\left(2\cdot 1\, h^2 + 2\cdot 2\cdot 0\cdot hk + \left(2\cdot\frac{0}{1} + \frac{2}{1}\right)k^2\right) + o(h^2+k^2) = \boxed{h^2 + 4k^2 + o(h^2+k^2)}$$

2. Pts critiques : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + \ln y^2 + 2\ln y = 0 \end{cases}$

La première équ. est satisfaite si $x=0$ ou $y=0$

Or $y \neq 0$ car $(x,0)$ n'est pas dans D.

Donc il reste $\begin{cases} x = 0 \\ (\ln y)^2 + 2\ln y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln y = 0 \text{ ou } \ln y + 2 = 0 \end{cases}$

Deux points critiques : $\boxed{(0,1) \text{ et } (0, e^{-2})}$

3. <u>Extrema locaux</u> :

	$(0,1)$	$(0,e^{-2})$
$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	2	$2e^{-2}$
$S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	0	0
$T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	2	$-2e^2$
$RT - S^2$	4	-4
$R>0$ ou $R<0$	$+$	
nature de pt	minimum (vu aussi dans la question 1d)	point selle

Un pt. de minimum local en $(0,1)$ avec la valeur 0

4. $y(x^2 + (\ln y)^2)$ est toujours positive ou zéro car $y > 0$ (le domaine de définition) et $x^2 + (\ln y)^2 \geq 0$

Donc le min local en $(0,1)$ donnant 0 est aussi <u>le min global</u>

<u>Pas de max global</u> car la fonction peut aller jusqu'à l'infini avec $y \to +\infty$.