Corrigé 2018-Math 5- CC 2

Partie I

Exercice 1.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on note $u = (1, -1, 1)$, $v = (-1, 2, -3)$. Soit $V = Vect(u, v)$, le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v, c'est-à-dire l'espace de toutes les combinaisons linéaires de u et v.

3 (1) Ecrire le vecteur $w = (2, 0, -2)$ comme combinaison linéaire de u et v.

3 (2) Trouver la condition sur x, y, z pour que le vecteur (x, y, z) soit dans V.

4 (3) On considère un sous-espace W donné par l'équation $x + y + z = 0$. Trouver une base de l'intersection $A = V \cap W$.

1.1 $(2,0,-2) = a(1,-1,1) + b(-1,2,-3)$

$$\begin{cases} 2 = a - b \\ 0 = -a + 2b \\ -2 = a - 3b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2 \\ a = 2b \\ a = 4 \end{cases} \qquad \boxed{(2,0,-2) = 4\cdot(1,-1,1) + 2(-1,2,-3)}$$

1.2. $$\begin{cases} x = a - b \\ y = -a + 2b \\ z = a - 3b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = x + y \\ -b = y + z \end{cases} \Rightarrow x + y = -y - z$$

$$\Rightarrow \boxed{x + 2y + z = 0}$$

1.3. Pour que (x,y,z) soit dans l'intersection il faut que (x,y,z) satisfait

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

On a le vecteur $\boxed{(1,0,-1)}$ qui satisfait les deux équations. La base de A a un seul vecteur car il s'agit de sous-espace dans $\mathbb{R}^3$ défini par 2 équations

La dimension de A est $\dim \mathbb{R}^3 - 2 = 1$

autrement on peut le voit comme une intersection de deux plans — c'est une droite, une base d'une droite est donnée par un seul vecteur.

Exercice 2.

On considère une fonction de deux variables

$$g : (x, y) \mapsto 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$$

4 (1) Déterminer les points critiques de g sur $\mathbb{R}^2$ et trouver leur nature (minimum local, maximum local ou point selle).

2 (2) La fonction g possède-t-elle un maximum global sur $\mathbb{R}^2$? un minimum global ?

4 (3) (a) Représenter le domaine $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (-1 \leq x \leq 0) \text{ et } (-1 \leq y \leq 0)\}$.

(b) Montrer que la restriction de g à T admet un minimum global et un maximum global que l'on déterminera.

(1) $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 6x^2 + 2y = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -2y + 2x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x^2 + 2x = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(3x+1) = 0 \\ y = x \end{cases}$

Deux points critiques : $(0,0)$ et $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

	$(0,0)$	$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
$R = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 12x$	0	-4
$T = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -2$	-2	-2
$S = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2$	2	2
$RT - S^2 > 0$?	Non	Oui

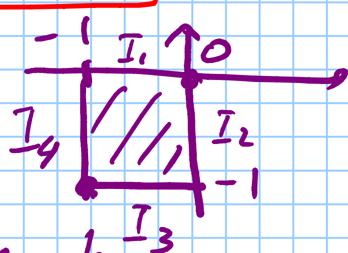
Nature des pts :

$(0,0)$ - pt selle

$(-1/3, -1/3)$ - max $(R<0)$

(2) $\boxed{\text{Pas de max ou min}}$ $\mathbb{R}^2$: $g(x, 0) \to \pm\infty$ avec $x \to \pm\infty$

(3) Domain T



T - est un compacte $\Rightarrow$ toute fonction continue admet un max et un min sur un compacte

(4) Restriction de g sur T a un max global et un min global soit dans un pt. critique soit sur le bord. On va comparer les valeurs de g sur les pts critique et sur les bords

sur le bord

(1) I_1 $\begin{cases} y = 0 \\ x \in [-1, 0] \end{cases}$ $g_1(x) = 2x^3 + 1$

$g_1'(x) = 6x^2 \Rightarrow$ pt critique : $\boxed{(0,0)}$ c'est le bord de I_1

en plus, l'autre bord de I_1 est $\boxed{(-1,0)}$

(2) sur I_2 : $\begin{cases} x=0 \\ y\in[-1,0] \end{cases}$ $g_2(y) = -y^2+1$, $g_2'(y) = -2y$

$y=0$ - pt. critique : $\boxed{(0,0)}$ et le bord de I_2 est encore le point $\boxed{(0,-1)}$

(3) sur I_3 : $\begin{cases} y=-1 \\ x\in[0,1] \end{cases}$ $g_3(x) = 2x^3 - 1 - 2\cdot x + 1$
$g_3(x) = 2x^3 - 2x$

$g_3'(x) = 6x^2 - 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1)}$

encore un pt de bord de I_3 : $\boxed{(-1,-1)}$

(4) Sur I_4 : $\begin{cases} x=-1 \\ y\in[-1,0] \end{cases}$ $g_4(y) = -2 - y^2 - 2y + 1$
$= -y^2 - 2y - 1$

$g_4'(y) = -2y - 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \boxed{(-1,-1)}$

(le bord on a déjà compté)

Il faut alors comparer les valeurs en $(-1/3, -1/3)$, $(0,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$ et $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1)$

$g(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 2\cdot(-\frac{1}{3})^3 - (-\frac{1}{3})^2 + 2(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}) + 1 = -\frac{2}{27} + \frac{1}{9} + 1 = \underline{\underline{1\frac{1}{27}}}$

$g(0,0) = \underline{\underline{1}}$, $g(0,-1) = \underline{\underline{0}}$, $g(-1,0) = \underline{\underline{-1}}$, $g(-1,-1) = \underline{\underline{0}}$

$g(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1) = 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 2\frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{-\frac{4}{3\sqrt{3}}}} = -\sqrt{\frac{16}{27}} > -1$

$= \underline{\frac{2}{3} + \frac{8}{9}\sqrt{3}} = \frac{18 + 24\sqrt{3}}{27} > \frac{28}{27} = 1\frac{1}{27}$

$-1 < -\frac{4\sqrt{3}}{9} < 0 < 1 < 1\frac{1}{27}$

Alors on a un <u>min global</u> en <u>$(-1,0)$</u> à valeur -1 et un <u>max global</u> en <u>$(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$</u> à valeur $1\frac{1}{27}$.

Partie II

Exercice 3. 2 4

Calculer les dérivées de $f_1 = \cos(\ln(4+x^2))$ et de $f_2 = (\tan x)^{\cos 2x}$.

$$f_1'(x) = \boxed{\frac{2x}{4+x^2}\cdot\left(-\sin\left(\ln(4+x^2)\right)\right)}$$

$$f_2(x) = (\tan x)^{\cos 2x} = e^{\ln(\tan x)^{\cos 2x}} = e^{\cos 2x\cdot\ln(\tan x)}$$

$$f_2'(x) = \left(2(-\sin 2x)\cdot\ln(\tan x) + \cos 2x\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right)e^{\cos 2x\cdot\ln(\tan x)}$$

$$= \boxed{\left(-2\sin 2x\cdot\ln(\tan x) + \frac{\cos 2x}{\tan x\cos^2 x}\right)(\tan x)^{\cos 2x}}$$

ou bien :

$$= \left(-2\sin 2x\ln(\tan x) + \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}\right)(\tan x)^{\cos 2x}$$

$$= 2\cdot\left(-\sin 2x\cdot\ln(\tan x) + \frac{1}{\tan 2x}\right)(\tan x)^{\cos 2x}$$

(on a utilisé : $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{\tan 2x} = \text{cotan}\, x$)

Exercice 4. 4

Soit la fonction $f(t) = \dfrac{1}{9+t^2}$.

3 (1) Calculer sa transformée de Fourier $g(x) = \mathcal{F}(f)(x)$. On pourra utiliser la formule obtenue en cours : $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(t) = \dfrac{2a}{a^2+4\pi^2t^2}$.

3 (2) Calculer la transformée de Fourier de $g(x)$.

4 (3) Déduire de la première question la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi tx)}{9+t^2}dt$ pour x réel quelconque.

(4) En appliquant l'identité de Parseval évaluer $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dt}{(t^2+9)^2}$.

(1) On utilise $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(t) = \dfrac{2a}{a^2+4\pi^2t^2} = \dfrac{1}{9+t^2}$

$$\frac{1}{9+t^2} = A\cdot\frac{2a}{a^2+4\pi^2t^2} = A\frac{2a}{\left(\frac{a^2}{4\pi^2}+t^2\right)4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4\pi^2} = 9 \Rightarrow \boxed{a = 6\pi}$$

$$\frac{1}{(9+t^2)} = A\cdot\frac{2\cdot 6\pi}{(9+t^2)4\pi^2} \Rightarrow A\cdot\frac{3}{\pi} = 1 \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}$$

On a alors $A\cdot\mathcal{F}\left(e^{-6\pi|x|}\right)(t) = \dfrac{1}{9+t^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{9+t^2} = \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{3} e^{-6\pi|x|}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{3} e^{-6\pi|x|}\right)$$

et puisque $\frac{1}{9+t^2}$ est paire $\mathcal{F}\left(\frac{1}{9+t^2}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{9+t^2}\right)$

et alors $\mathcal{F}\left(\frac{1}{9+t^2}\right) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left(\frac{\pi}{3} e^{-6\pi|x|}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3} e^{-6\pi|x|}}$

(2) $\mathcal{F}\left(\frac{\pi}{3} e^{-6\pi|x|}\right) = \frac{1}{9+t^2}$ pour la même raison que $\frac{\pi}{3} e^{-6\pi|x|}$ est une fonction paire. On a

$$\mathcal{F}\left(\frac{\pi}{3} e^{-6\pi|x|}\right) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{9+t^2}\right)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{9+t^2}\right)\right) = \boxed{\frac{1}{9+t^2}}$$

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi t x)\, dt \overset{\text{pour } f \text{ paire}}{=} 2\int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi t x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t x}\, dt = \boxed{\frac{\pi}{3} e^{-6\pi|x|}}$$ pour la fonction $\frac{1}{9+t^2}$.

Par définition de Transformée de Fourier et par la formule d'Euler:

$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ mais $\sin\alpha$ étant impaire n'a pas de contribution

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi t \cdot x)}{9+t^2}\, dx = 0$$

(4) $$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+9)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{F}(f(t))(x)\|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi^2}{9} e^{-12\pi|x|} dx = \frac{\pi^2}{9}\int_0^{+\infty} e^{-12\pi x} dx = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{(-12\pi)} \cdot \left[e^{-12\pi x}\right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{108}}$$