2018-2019 - Math5 - CF - corrigé

1

Exercice 1.

2 (1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire : $f(x) = -f(-x)$. Déterminer par un calcul les coefficients α et β dans la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi xt}\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi xt)\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi xt)\,\mathrm{d}x.$$

3 (2) On rappelle que la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-\pi x^2}$ est égale à $F(f)(t) = e^{-\pi t^2}$. Déterminer par un calcul la transformée de Fourier de la fonction : $G(x) = \frac{1}{2}e^{-3\pi x^2}$?

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i2\pi xt}\,dx$

$\displaystyle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\cos(-2\pi xt) + i\sin(-2\pi xt)\right)dx$

$\displaystyle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos 2\pi xt\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(2\pi xt)\,dx$

impaire · paire = impaire — impaire · impaire = paire

$\displaystyle = 0 - 2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi xt)\,dx$ D'où $\boxed{\alpha = 0,\ \beta = -2i}$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\,e^{-2\pi ixt}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-3\pi x^2}e^{-2\pi ixt}\,dx$

$\displaystyle \underset{\downarrow}{\overset{u=\sqrt{3}\cdot x}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-\pi u^2}e^{-2\pi i\frac{uy}{\sqrt{3}}}\frac{du}{\sqrt{3}}$

$\displaystyle = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}e^{-2\pi iu\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)}\,du$

$\displaystyle = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,F\left(e^{-\pi u^2}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,e^{-\pi\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2} = \boxed{\frac{e^{-\frac{\pi y^2}{3}}}{2\sqrt{3}}}$

2

Exercice 2. Soit l'ensemble

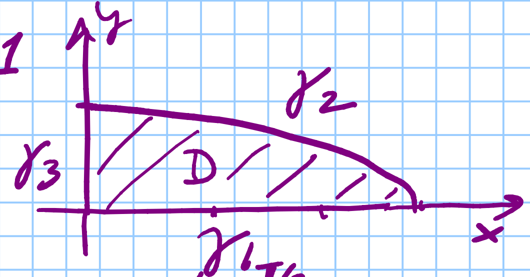
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{9}+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}.$$

1 (1) Dessiner D.

(2) Calculer de deux façons différentes l'intégrale $I=\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

1,5 (a) en utilisant le changement de variables : $\begin{cases} x=3r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\ ; \end{cases}$

2,5 (b) en utilisant la formule de Green-Riemann sur un circuit fermé parcourant le bord de D.

1 

2(a) $dx\,dy = 3r\,dr\,d\theta$

$r\in[0,1],\ \theta\in[0,\pi/2]$

$I=\iint_D (x-y)\,dx\,dy$

$= 3\int_0^1\int_0^{\pi/2}(3r\cos\theta - r\sin\theta)\,d\theta\cdot r\,dr$

$= 3\int_0^1\left(3r[\sin\theta]_0^{\pi/2} + r[\cos\theta]_0^{\pi/2}\right)r\,dr = 6\int_0^1 r^2\,dr = \boxed{2}$

2(b) Green-Riemann : il faut choisir P et Q t.q $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x-y$

une des choix possibles : $Q=\frac{x^2}{2}-xy$ et $P=0$

(ou bien $Q=\frac{x^2}{2}$ et $P=\frac{y^2}{2}$ ou ...)

$I=\iint_D (x-y)\,dx\,dy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_{\partial D^+} P\,dx+Q\,dy$

$I=\int_{\partial D^+}\left(\frac{x^2}{2}-xy\right)dy = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}\left(\frac{x^2}{2}-xy\right)dy$

$\gamma_1:[0,3]\mapsto[0,3]\times\{0\}$ $t\mapsto(t,0)\Rightarrow dy=0\Rightarrow\int_{\gamma_1}=0$

$\gamma_3:[0,1]\mapsto\{0\}\times[0,1]$ $t\mapsto(0,t)\Rightarrow\frac{x^2}{2}-xy=0\Rightarrow\int_{\gamma_3}=0$

$\gamma_2:[0,\pi/2]\mapsto$: $t\mapsto(3\cos t,\sin t)$, $dy=d\sin t=\cos t\,dt$

$I=\int_0^{\pi/2}\left(9\frac{\cos^2 t}{2}-3\cos t\sin t\right)\cos t\,dt = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\cdot\cos t\,dt$

$-3\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\,dt = \frac{9}{2}[\sin t]_0^{\pi/2}-\frac{9}{2}\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2}+3\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2}$

$=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-1=\boxed{2}$

3

Exercice 3. Soit S la surface donnée par l'équation $x^2 + y^2 = 4z$.

1 (1) Montrer que le point $A = (2, -4, 5)$ se trouve sur la surface S.

(2) Trouver les équations

2 (a) du plan tangent à la surface S en A;

2 (b) de la droite normale à la surface S en A.

3(1) $2^2 + (-4)^2 = 4 \cdot 5$ en effet $4+16=20$ et $4 \cdot 5 = 20$

$\Rightarrow A \in S$

3.(2)(a) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4z$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -4$

au pt. A : $\frac{\partial F}{\partial x}(A) = 2 \cdot 2 = 4$, $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 2 \cdot (-4) = -8$, $\frac{\partial F}{\partial z}(A) = -4$

alors, l'éqn. du plan tangent :

$$4(x-2) - 8(y-(-4)) - 4(z-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) - 2(y+4) - (z-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - z - 2 - 8 + 5 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x - 2y - z - 5 = 0}$$

3(2)(b). $\frac{x-x_0}{\partial F/\partial x(A)} = \frac{y-y_0}{\partial F/\partial y(A)} = \frac{z-z_0}{\partial F/\partial z(A)}$ donne

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{-8} = \frac{z-5}{-4} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{x-2 = \frac{y+4}{-2} = -z+5}$$

Exercice 4. Soit C la surface conique définie par

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{et} \quad x \leq 3.$$

1 (1) Dessiner C.

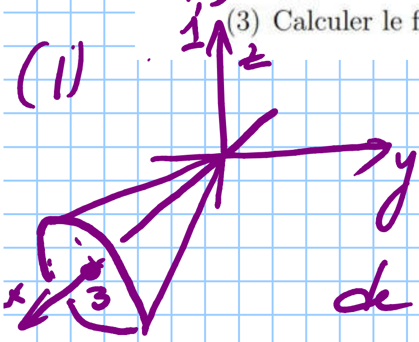
(2) Calculer de deux façons différentes l'intégrale de surface $I = \iint_C x^2 \, ds$,

1,5 (a) en utilisant la paramétrisation cartésienne de C : $(y, z) \mapsto (\sqrt{y^2+z^2}, y, z)$.

1,5 (b) en utilisant la paramétrisation polaire de C : $(r, t) \mapsto (r, r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1 (3) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V} = (1, -y, -z)$ à travers C.

(1)



(2a) $(y,z) \xrightarrow{\varphi} (\sqrt{y^2+z^2}, y, z)$ donne la normale à la surface C par le calcul de produit vectoriel :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ -\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \end{pmatrix}.$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{y^2}{y^2+z^2} + \frac{z^2}{y^2+z^2}}\, dy\, dz = \sqrt{2}\, dy\, dz$$

$$\iint_C x^2 ds = \iint_{D(3)} (y^2+z^2)\sqrt{2}\, dy\, dz = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho^2 \sqrt{2}\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 = \boxed{\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\, 81.}$$

(2b) $f(r,t) = (r, r\cos t, r\sin t)$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = (1, \cos t, \sin t) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial t} = (0, -r\sin t, r\cos t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}, \quad ds = \sqrt{r^2 + r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}\, dr\, dt$$

$$= \sqrt{2}\, r\, dr\, dt$$

$$\iint_C x^2 ds = \int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2 \sqrt{2}\, r\, dr\, dt = 2\pi\sqrt{2}\int_0^3 r^3 dr$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{r^4}{\sqrt{2}}\right] = \boxed{\frac{\pi \cdot 81}{\sqrt{2}}}$$

(3) $\underline{\text{Flux}} = \iint_C \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \end{pmatrix}; n \right\rangle ds = \iint_C \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ -\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \end{pmatrix} \right\rangle dy\, dz$

$$= \iint_C \left(1 + \frac{y^2}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{y^2+z^2}}\right) dy\, dz = \iint_C 1 + \sqrt{y^2+z^2}\, dy\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (1+\rho)\rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi\int_0^3 (\rho + \rho^2)\, d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3}\right]_0^3 = \boxed{27\pi}$$