2019-Math 5- CC2 Corrigé.

Exercice 1. Questions diverses

1. Soit u une fonction réelle, impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$. Justifier que sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(u)(y) = -2i\int_0^\infty u(t)\sin(2\pi yt)dt$.
2. Est-ce qu'il existe une fonction v réelle, impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$, telle que $\mathcal{F}(v) = 0$? Si oui - laquelle ? Si non - justifier.
3. Calculer $(V * W)(x)$ au point $x = 3$ pour $V(x) = x^3 \sin\frac{\pi x}{2}$ et $W(x) = \delta(x)$.

$\boxed{1.1}$ $e^{-i2\pi yt} = \cos(2\pi yt) - i\sin(2\pi yt)$ (Euler)

u · impaire $\Leftrightarrow$ $u(-t) = -u(t)$

$\Rightarrow$ $u(-t)\cos(2\pi y(-t)) = -u(t)\cos(2\pi yt)$ - impaire

et $u(-t)\sin(2\pi y(-t)) = -u(t)(-\sin(2\pi yt))$
$= u(t)\sin(2\pi yt)$ - paire

Pour toute fonction g paire $(g(-t) = g(t))$ on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)dt + \int_{-\infty}^{0} g(t)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} g(t)dt + \int_{z=-t=+\infty}^{z=-t=0} g(-z)(-dz)$$

$$= \int_0^{+\infty} g(t)dt + \int_0^{+\infty} g(z)\,dz = 2\int_0^{+\infty} g(t)dt$$

Pour toute fonction g impaire $(g(-t) = -g(t))$

on a $$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)dt + \int_{-\infty}^{0} g(t)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} g(t)dz + \int_{z=-t=+\infty}^{0} g(-z)(-dz) = \int_0^{+\infty} g(t)dt - \int_0^{+\infty} g(z)dz = 0$$

Ce qui donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-i2\pi yt}dt = -2i\int u(t)\sin(2\pi yt)\,dt.$

$\boxed{1.2}$. On remarque la fonction $v(t)=0$, est son propre transformée de Fourier.

En effet, $\mathcal{F}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot e^{-i2\pi y t} dt = 0$

La fonction $v(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. est intégrable et aussi paire et impaire :

$v(t) = v(-t) = -v(t) = 0$. ~~Donc la réponse est~~ $\boxed{\text{la fonction } v(t) \equiv 0}$

$\boxed{1.3}$ $v * w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^3 \sin \frac{\pi y}{2} \cdot \delta(x-y)\, dy$

$= x^3 \sin \frac{\pi x}{2}$ par définition de la fonction δ – $\int_{-\infty}^{+\infty} v(y)\delta(x-y)\,dy = v(y)\Big|_{x-y=0} = v(x)$

Donc au pt $x=3$ on a $v * W(3) = 3^3 \sin \frac{\pi \cdot 3}{2} = \boxed{-27}$

Exercice 2. La Gaussienne

Soi $a > 0$. On donne la transformée de Fourier de la fonction e^{-ax^2} :

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 y^2/a}, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

On considère la fonction

$$G(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{-x^2/2}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

1. Trouver sa transformée de Fourier.
2. En déduire $\mathcal{F}(G * G)(y)$. *Indication :* utiliser les propriétés de convolution.
3. En déduire $G * G(x)$. *Indication :* utiliser les propriétés de convolution.

1. $G(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$, $a = \frac{1}{2}$

$\mathcal{F}(e^{-x^2/2}) = \sqrt{\pi/\tfrac{1}{2}}\; e^{-\pi^2 y^2/\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-2\pi^2 y^2}$

Donc $\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\right)(y) = \boxed{e^{-2\pi^2 y^2}}$

2. La propriété principale de convolution est que $\mathcal{F}(G * G)(y) = \mathcal{F}(G) \cdot \mathcal{F}(G)$

Donc ici on a

$$\mathcal{F}(G*G)(y) = e^{-2\pi^2y^2}\cdot e^{-2\pi^2y^2} = \boxed{e^{-4\pi^2y^2}}$$

3. L'autre propriété principale de convolution donne $G(x) * G(x) = \mathcal{F}(g\cdot g)(x)$ si $G(x) = \mathcal{F}(g(y))(x)$. Ici on sait que $\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\right)(y) = e^{-2\pi^2y^2}$. Comme il s'agit de fonctions paires on a aussi :

$$\mathcal{F}(\underbrace{e^{-2\pi^2y^2}}_{g(y)})(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}}_{G(x)}$$

Donc le resultat est

$$G * G(x) = \mathcal{F}\left(\left(e^{-2\pi^2y^2}\right)^2\right)(x) = \mathcal{F}\left(e^{-4\pi^2y^2}\right)$$

$$\underset{a=4\pi^2}{=} \sqrt{\frac{\pi}{4\pi^2}}\; e^{-\pi^2x^2/4\pi^2} = \boxed{\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\; e^{-\frac{x^2}{4}}}$$

Exercice 3. Propriétés de transformée de Fourier

On considère trois fonctions :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ g(x) = \frac{1}{2-2x+x^2},\ h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

et on donne la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(f)(t) = \pi e^{-2\pi|t|}.$$

1. Vérifier que $g(x) = f(x-a)$ avec a convenablement choisi et déduire *une simple expression* de $\mathcal{F}(g)(t)$.
2. En utilisant une propriété de dérivation en déduire *une simple expression* de $\mathcal{F}(h)(t)$.
3. Calculer **a)** $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$, **b)** $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x$ et **c)** $\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(x)\mathrm{d}x$.
   Indication : on peut utiliser l'idéntité de Parseval.

$\boxed{3.1}$ On remarque que
$$g(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2} = f(x-1)$$

On utilise une propriété de transformée de Fourier : $\mathcal{F}(f(x-1))(y) = e^{i2\pi y}\mathcal{F}(f(x))(y)$

qui donne $\mathcal{F}(g(x))(y) = \pi e^{-2\pi(|t|-iy)}$

$\boxed{3.2}$ On remarque que $f'(x) = \frac{2x}{(1+x)^2}$ donc $h(x) = \frac{1}{2}f'(x)$

La propriété de dérivation :
$$\mathcal{F}(\tfrac{1}{2}f'(x))(y) = \frac{1}{2}\, i2\pi y\, \mathcal{F}(f(x))(y)$$
$$= i\pi y\,\mathcal{F}(f)(y) = \boxed{i\pi^2 y\, e^{-2\pi|y|}}$$

$\boxed{3.3}$ a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx \overset{\text{Parseval}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f)(y)|^2 dy$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 e^{-4\pi|t|}dt = 2\pi^2\int_0^{+\infty} e^{-4\pi t}dt = \frac{2\pi^2}{(-4\pi)}\left[e^{-4\pi t}\right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x-1)\,dx = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}\pi^4 y^2 e^{-4\pi|y|}dy = -2\int_0^{+\infty}\pi^4 y^2 e^{-4\pi y}dy$

$$= -\frac{2\pi}{4^3}\int_0^{+\infty}(4\pi y)^2 e^{-4\pi y}\,d(4\pi y) = -\frac{\pi}{32}\int_0^{+\infty} z^2 e^{-z}dz = \boxed{-\frac{\pi}{16}}$$

car $\displaystyle\int_0^{+\infty} z^2 e^{-z}dz \overset{IPP}{=} \left[z^2 e^{-z}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2z e^{-z}dz \overset{IPP}{=} \left[-2z e^{-z}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-z}dz = 2$