

Exercice I.1.

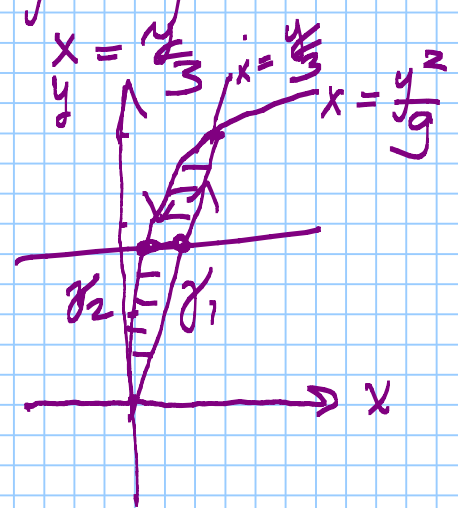
Soit $\mathcal{P}$ le domaine dans $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes $x = y^2/9$ et $y = 3x$ et soit $\mathcal{C}$ le circuit donné par le bord de $\mathcal{P}$ parcouru dans le sens direct (contre l'aiguille d'une montre).

1. Déterminer les points d'intersection de deux courbes.
2. Dessiner le domaine $\mathcal{P}$.
3. Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.
4. Calculer l'intégral curviligne $\oint_{\mathcal{C}} y^2 dx$ par deux méthodes :
 - (a) directement,
 - (b) en utilisant la formule de Green-Riemann.

$$\boxed{1} \quad \begin{cases} x = \frac{y^2}{9} \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{3} = \frac{y^2}{9} \\ x = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y = 0 \\ x = \frac{y}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$(0,0)$ et $(1,3)$



$$\boxed{3} \quad \iint_{\mathcal{P}} dx dy = \int_0^3 \left(\int_{y^2/9}^{y/3} x \right) dy$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{y}{3} - \frac{y^2}{9} \right) dy = \left[\frac{y^2}{6} - \frac{y^3}{27} \right]_0^3 = \frac{9}{6} - 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{4} \quad \oint_{\mathcal{C}} y^2 dx = \int_0^1 (3t)^2 dt + \int_1^0 \frac{2}{9} t dt = 9 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 - \frac{2}{9} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^0 = 3 - \frac{2}{9} = \boxed{\frac{25}{9}}$$

paramétrer $\gamma_1: t \mapsto \begin{cases} x = t \\ y = 3t \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad dx = dt$

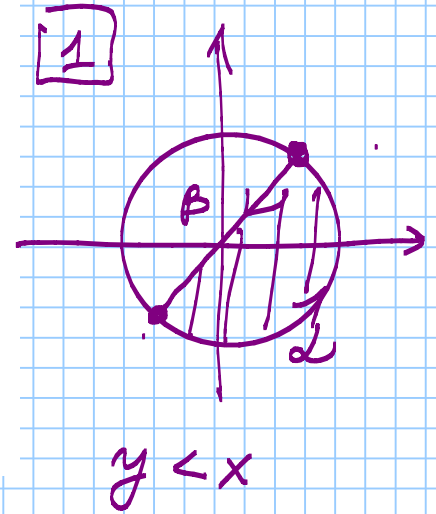
$$\gamma_2: t \mapsto \begin{cases} x = \frac{t^2}{9} \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,3] \quad dx = \frac{2t}{9} dt$$

$$\boxed{5} \quad \oint_{\mathcal{C}} y^2 dx \stackrel{\text{Green-Riemann}}{=} - \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial(y^2)}{\partial y} dx dy = - \int_0^3 \int_{y^2/9}^{y/3} 2y dx dy$$

$$= - \int_0^3 2y \left[\frac{y}{3} - \frac{y^2}{9} \right] dy = - \left[\frac{2}{3} \frac{y^3}{3} - \frac{2}{9} \frac{y^4}{4} \right]_0^3 = - \left(2 \cdot 3 - \frac{9}{2} \right) = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

Exercise I.2.

On considère le demi-disque $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \leq x\}$. Notons γ le circuit parcourue contre l'aiguille d'une montre sur le bord de $\mathcal{D}$. On remarque que B est une réunion d'un demi-cercle (notons le α) et d'un segment (notons le β), donc $\gamma = \alpha \cup \beta$. On introduit également la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 e^{xy}$.



1. Dessiner $\mathcal{D}$, B et noter α , β et le sens de parcours de γ .
2. Calculer l'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} 2x dx dy$ en utilisant un changement de variables adapté.
3. Calculer l'intégrale curviligne $\int_L x^2 dy$ pour
 - a) $L = \alpha$, b) $L = \beta$ et finalement c) $L = \gamma$.
4. Comparer les résultats des calculs dans les questions 2. et 3. Commenter.
5. Déterminer $\vec{\nabla} f$, le gradient de la fonction f .
6. Que vaut la circulation du champ $\vec{\nabla} f$ le long du circuit γ ?

2. $\iint_{\mathcal{D}} 2x dx dy = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 2 r \cos t r dr dt$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{coord polaires: } x = r \cos t \\ dx dy = r dr dt \\ t \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], r \in [0, 1] \end{array} \right.$

$= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt \cdot 2 \int_0^1 r^2 dr = \left[\sin t \right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cdot 2 \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1$

$= \left[\sin \frac{\pi}{4} - \sin \left(-\frac{3}{4} \pi \right) \right] \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

3. $\int_{\alpha} x^2 dy = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)^2 \cos t dt = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t dt$

$d: t \mapsto \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad dy = \cos t dt \quad t \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

$\cos^3 t = \frac{(\cos 3t + 3 \cos t)}{4}$

$-\frac{3\pi}{4} = -2\pi - \frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 3t + 3 \cos t) dt = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin 3t}{3} + 3 \sin t \right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{12} \left(\sin \left(3 \cdot \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(3 \cdot \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) \right) + \frac{3}{4} \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{12} \left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) + \frac{3}{4} \left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{12} \left(\sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \right) + \frac{3}{4} \left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{12} \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4} \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{1}{12} + \frac{3}{4} \right) \sqrt{2} = \frac{1+9}{12} \sqrt{2} = \frac{10}{12} \sqrt{2} = \frac{5}{6} \sqrt{2}
 \end{aligned}$$


$\beta: t \rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}, t \in \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right), \cos\frac{\pi}{4} \right] = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

sens de β 

$$\begin{aligned}
 I_{\beta} &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3} \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right] = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{6} \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$I_{\gamma} = I_{\alpha} + I_{\beta} = \frac{5}{6} \sqrt{2} - \frac{1}{6} \sqrt{2} = \frac{2}{3} \sqrt{2} \quad \text{même résultat que en [2]}$$

[4] On a $\iint_P 2x dx dy = \oint_{\gamma} x^2 dy$

γ 

c'est directement le thm. de Green-Riemann

$$\begin{aligned}
 [5] \quad \vec{\nabla} f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} x^3 e^{xy}, \frac{\partial}{\partial y} x^3 e^{xy} \right) \\
 &= (3x^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy}, x^3 e^{xy})
 \end{aligned}$$

$$[6] \quad \oint_{\gamma} \vec{\nabla} f ds = \oint \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Par Green-Riemann $= \iint_P \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] dx dy = 0$

Exercice II.1.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble définie par $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \leq x^2 + y^2, z \geq x^2 + y^2\}$.
Soient Σ_1 la partie du bord de $\mathcal{M}$ satisfaisant l'équation $z^2 = x^2 + y^2$
et Σ_2 la partie du bord de $\mathcal{M}$ satisfaisant l'équation $z = x^2 + y^2$.

- On remarque que l'intersection $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est un ensemble consistant d'un point isolé et d'une courbe. Trouver un système de deux équations qui défini cette courbe.
- On remarque que $\mathcal{M}$ est un solide de révolution autour de l'axe Oz. Pour avoir une idée sur $\mathcal{M}$
 - Faire un dessin de la partie de $\mathcal{M}$ qui se trouve dans le plan yz.
 - Représenter l'intersection de $\mathcal{M}$ avec le plan $z = 1/2$ (dessiner dans le plan horizontal $z = 1/2$.)
- Montrer que les points $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ appartiennent à la surface $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ et trouver les équations du plan tangent et de la droite normale à la surface $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ dans ces points.
- Calculer le volume de $\mathcal{M}$ en calculant l'intégrale triple correspondant.
- Soit $\vec{V}$ le champs de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$.

- Utiliser le théorème d'Ostrogradsky-Gauss pour trouver le flux de $\vec{V}$ à travers de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, le bord de $\mathcal{M}$.
- Montrer que le champs $\vec{V}$ est tangent à Σ_1 . Pour cela il suffit de montrer que V est orthogonal à la normale de Σ_1 en tout point $(x, y, z) \in \Sigma_1$.
- En deduire le flux de $\vec{V}$ à travers Σ_1 .
- En utilisant les resultats precedents trouver le flux de $\vec{V}$ à travers de la surface Σ_2 orientée vers le bas.

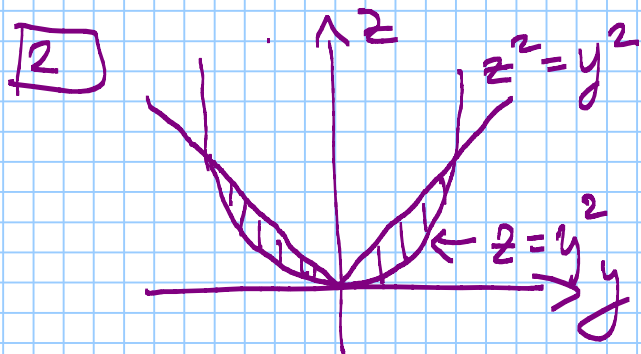
Indication : Dans cette partie 5. Il n'y a aucune intégrale à calculer - on peut utiliser l'intégrale de volume déjà trouvé, le produit scalaire adapté et les propriétés du flux à travers d'une surface.

$$\boxed{1} \quad \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = z \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z=1 \\ z^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{(0,0,0)\} \cup \text{Cercle unitaire dans le plan } z=1$$



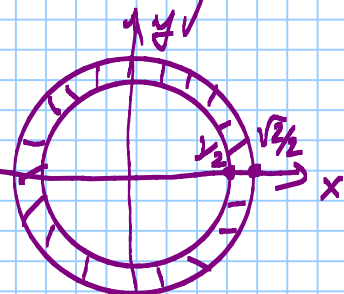
solide de révolution entre le paraboloidé à l'exterieur et le cône à l'interieur

Dans le plan $z = \frac{1}{2}$ on a $\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$ - un anneau:

$$\boxed{3} \quad A: \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, A \in \Sigma_1 \quad z = 1/2$$

$$B: \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, B \in \Sigma_2$$



Vecteurs normales aux surfaces Σ_1 et Σ_2 ?

Σ_1 est donnée par l'équation

$F_1(x, y, z) = 0$ avec $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ et Σ_2 par

$F_2(x, y, z) = 0$ avec $F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) = (2x, 2y, -2z)$$

au pt A:

Vect. normale: $(2 \cdot \frac{1}{2}, 2 \cdot \frac{1}{2}, -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})$
 $= (1, 1, -\sqrt{2})$

Plan tangent:

$$1 \cdot (x - \frac{1}{2}) + 1 \cdot (y - \frac{1}{2}) + (-\sqrt{2}) \cdot (z - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

$$x + y - \sqrt{2}z = 0$$

La normale: $\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{1} = \frac{z - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}}$

ou $x - \frac{1}{2} = y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) = (2x, 2y, -1)$$

au pt B:

$$(2(\frac{1}{2}), 2(-\frac{1}{2}), -1)$$

$$= (1, -1, -1)$$

$$(x - \frac{1}{2}) - (y + \frac{1}{2}) - (z - \frac{1}{2}) = 0$$

$$x - y - z - \frac{1}{2} = 0$$

$$x - \frac{1}{2} = -(y + \frac{1}{2}) = -(z - \frac{1}{2})$$

[4] $\iiint_{M_1} dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} r dr \right) dt dz \right)$

annexé: $z^2 \leq x^2 + y^2 \leq z$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} dz = \pi \int_0^1 (z - z^2) dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

[5a] Ostrogradsky-Gauss: $\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_M \text{div } \vec{V} dx dy dz$

Ici: $\text{div } \vec{V} = 2 + 2 + 2 = 6$ donc l'intégrale

est juste $6 \iiint_M dx dy dz = \boxed{\pi}$

[5b] Le champ normale à la surface $\Sigma_1: (2x, 2y, -2z)$ dans les points de Σ_1 est orthogonale au champ

$$\vec{V}: (2x, 2y, -2z) \cdot (2x, 2y, 2z) = 4x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0$$

Car sur $\Sigma_1: x^2 + y^2 = z^2$!

~~Donc~~ le champ $\vec{V}$ est tangent à Σ_1 et

donc son flux à travers de Σ_1 est nul!

Rien he travers Σ_1 !

5d) du coup le flux de l'intérieur de E vers extérieur à travers de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ passe seulement par la partie Σ_2 et par Ostrogradski-Gauss est égale à $\boxed{\pi}$!

Exercice II.2.

Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

En passant aux coordonnées sphériques calculer $\iiint_V (3z^2 + 1) dx dy dz$.

Indication. On peut utiliser sans démonstration l'expression trouvée en cours pour $dx dy dz$ en coordonnées sphériques.

$$\iiint_V (3z^2 + 1) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 (3r^2 \cos^2 \theta + 1) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$z = r \cos \theta$

volume d'une boule unitaire

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3}$$

et $3z^2$ donne π

$$3 \cdot 2\pi \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 6\pi \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = \frac{4\pi}{5}$$

et leur somme: $\frac{4}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \boxed{\frac{32}{15}\pi}$