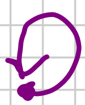
2013-11-21-Caldero

Representatron des carquoi.

Introduction

Carquoi : points + fleches

Exemples

- $\bullet$ - 1er semestre
  invariant : dimension
- $\bullet \to \bullet$ 2ème semestre
  morphismes sont equiv. si ils ont le même rang
-  3ème semestre
  χ, ps etc invariants
  n-ème semestre

3 approches $\left\{ \begin{array}{l} \text{naturelle} \\ A\text{-mod} \\ \text{géom. alg.} \end{array} \right.$

I Definition: naturelle

on commense par $E \to F$ des fleches!

Q_0 - ensemble de sommets

Q_1 - fleches

$\bullet \to \bullet \to \bullet$

$Q_1 \to Q_0$

$\alpha \longmapsto s(\alpha)$ source

$\alpha \longmapsto t(\alpha)$ but

Repr. de carquoi :

Soit Q un carquoi.

Sa repr. est la donnée
d'un e.v. (de dim fini sur $\mathbb{k}$)

V_i, $i \in Q_0$

et pour chaque flèche α
une application linéaire

$$V_\alpha : V_{s(\alpha)} \longmapsto V_{t(\alpha)}$$

On définit des morphismes
de représentations.

Soit V, W deux reps de
carquois Q.

Un morphisme de $\mathrm{Hom}_Q(V,W)$
est la donnée $(f_i)_{i \in Q_0}$
d'applications linéaires

$$V_i \xrightarrow{f_i} W_i \quad \text{t q.}$$

$\forall \alpha$
le carré

$$\begin{tikzcd}
V_{s(\alpha)} \arrow[r, "v_\alpha"] \arrow[d, "f_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "f_{t(\alpha)}"] \\
W_{s(\alpha)} \arrow[r, "w_\alpha"] & W_{t(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

commute.

Dit autrement

$$\bigoplus_{i\in Q_0} \mathrm{Hom}_{[W]}(V_i, W_i) \xrightarrow{\varphi_{V,W}} \bigoplus_{\alpha\in Q_1} \mathrm{Hom}(V_{s(\alpha)}, W_{t(\alpha)})$$

$$(f_i)_{i\in Q_0} \longmapsto \left(\omega_\alpha f_{s(\alpha)} - f_{t(\alpha)} v_\alpha\right)_{\alpha\in Q_1}$$

$$\boxed{\mathrm{Hom}_Q(V, W) := \mathrm{Ker}\,\varphi_{V,W}}$$

$\mathrm{coker}\,\varphi_{V,W}$

Forme de Tits

$$\dim \mathrm{Hom}_Q(V, W) := [V, W]^0$$

$$\dim \mathrm{coker}\,\varphi_{V,w} := [V, W]^1$$

On a donc

$$[V, W]^0 - [V, W]^1 =$$

$$\sum_{i\in Q_0} d_i^V d_i^W - \sum_{\alpha\in Q_1} d^V_{s(\alpha)} d^W_{t(\alpha)}$$

où $d_i^X = \dim X_i$

la forme de Tits - c'est une forme quadratique associée à la forme bilinéaire :

$$\langle x, y\rangle_Q = \sum_{i\in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha\in Q_1} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)}$$

$$\boxed{q(x) = \langle x, x \rangle_Q}$$

de sorte que $q_Q(\dim V)$

$$= [V,V]^0 - [V,V]^1$$

$$\dim V = (\dim V_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$$

Etudier les endomorphismes
= $k[x]$-modules
(polynomes)

II algèbres de carquois

À un carquois on associe une algèbre A_Q qui est l'algèbre de chemins de Q munie de la concaténation

chemin $\quad C : (\underset{\in Q_0}{x}, \underset{\in Q_1}{\alpha_1}, \dots, \underset{\in Q_1}{\alpha_n}, \underset{\in Q_0}{y})$

$$x \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{\alpha_n} y$$

t.q. $s(\alpha_1) = x$

$t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$

$t(\alpha_n) = y$

concatenation :

$$C * C = \begin{cases} 0 & \text{si pas concatenable} \\ \text{concatenation } C \text{ et } C' & \end{cases}$$

Chemin paresseux :

e_i, $i \in Q_0$ $\quad e_i = (x, x)$

$e_i * e_j = \delta_{ij}\, e_i$, $\quad e_i \alpha = \delta_{i\,t(\alpha)}\, \alpha$

$\alpha\, e_i = \delta_{s(\alpha) i}\, \alpha$

Du coup $\sum_{i \in Q_0} e_i = 1 \in A_Q$

A_Q - engendré par $\alpha \in Q_1$,
e_i, $i \in Q_0$

$A = \bigoplus_{i \in Q_0} A e_i$ (les projectives)

On construit l'équivalence de catégories :

<u>Rep des Carquois</u>	<u>A_Q - mod.</u>
$(V) = \begin{cases} V_i,\ i \in Q_0 \\ v_\alpha \end{cases}$ $\longleftrightarrow$	$V = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ (k-e.v.)
	e_i = proj. sur V_i
	$\alpha = V_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$ prolongé par 0.
$\ker_{V,W} = \mathrm{Hom}_Q(V, W)$ $\longleftrightarrow$	$\mathrm{Hom}_{A_Q}(V, W)$

(Il faut encore vérifier
$f(\underset{e_i}{\alpha} m) = \underline{\alpha} f(m)$ mais ça marche)

Coker $\varphi_{v,w}$

utilité de la version A-mod

Catégorie abélienne, Krull-Schmidt
(KS c'est pour avoir unicité de la décomposition en indécomposables)

Simples: $\overset{0}{\circ} \longrightarrow \overset{k}{\bullet} \longrightarrow \overset{0}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{0}{\bullet}$ S_i

(sur un corps alg. clos)

Projectives indécomposables:

Ae_i: facteur-direct d'un libre A
ils sont deux-à-deux non-isomorphes et indécomposables.

$\overset{1}{\times} \longrightarrow \overset{2}{\times}$

Ae_i $\quad K \xrightarrow{1} K$

S_1 $\quad 0 \xrightarrow{0} K$

Résolution projective de A-mod

Proposition

$$0 \to \bigoplus A e_{s(\alpha)} \otimes e_{t(\alpha)} M \longrightarrow A e_i \otimes e_i M \to M \to 0$$

$$u \otimes m \longmapsto u\alpha \otimes m - u \otimes m$$

$$u \otimes m \longmapsto um$$

est une resolution projective.

Dim homologique de de A-mod est 1.

(Si il n'y a pas de flèches la dim est 0)

On applique à cette resolution le foncteur $Hom_A(-, L)$ (contravariant et exacte à droite)

La suite longue alors:

$$0 \to Hom_A(M,L) \to \bigoplus_{i \in Q_0} Hom_{\mathbb{K}}(M, L_i) \to \bigoplus_{\alpha \in Q_0} Hom(M_{s(\alpha)}, L_{t(\alpha)})$$

$$\to Ext^1_A(M,L) \longrightarrow 0$$

$$\shortparallel$$

$$\mathrm{coker}\, \varphi_{M,L}$$

La forme de Tits (= forme de Ringel)

Remarque:

en fait c'est la formule d'Euler ! $(\sum (-1)^k \dim H^k(\ ))$

$\langle \dim M \rangle = \dim \mathrm{Hom}_A(M,M) - \dim \mathrm{Ext}^1_A(M,M)$

III Géometrie algebrique

$\underline{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$

$$\mathrm{Rep}_{\underline{d}} = \bigoplus_{\alpha \in Q_0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{s(\alpha)}, \mathbb{K}^{t(\alpha)})$$

$V \in \mathrm{Rep}_Q$, $\dim V = \underline{d}$

$\Leftrightarrow V \in \mathrm{Rep}_{\underline{d}}$

$$\begin{tikzcd} V_{s(\alpha)} \arrow[r] \arrow[d, "g_{s(\alpha)}"', "\wr"] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "g_{t(\alpha)}", "\wr"'] \\ W_{s(\alpha)} \arrow[r] & W_{t(\alpha)} \end{tikzcd}$$

Remarque: généralisation de l'action de changement de base:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "H"] \arrow[loop below, "P"] & F \arrow[loop below, "Q"] \end{tikzcd}$$

$H' = QHP^{-1}$

$$G_{\underline{d}} = \prod_{i \in Q_0} GL_{d_i}(\mathbb{K})$$

$(g_i) \in G_{\underline{d}}$ agit sur $\mathrm{Rep}_{\underline{d}}$ par

$$(g_i) \cdot (V_\alpha) = (g_{t(\alpha)} V_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1})$$

$\boxed{\text{V et W sont dans la même orbite } \mathcal{O}} \Leftrightarrow$ les repns V et W sont isomorphes soit $V \in \mathrm{Rep}_{\underline{d}}$

$$\varphi_V : G_{\underline{d}} \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\underline{d}}$$
$$g \longmapsto g \cdot V$$

Remarque

$$G_V = \mathrm{Stab}(V) = \{g,\ g\cdot V = V\}$$

$$\mathrm{Lie}\, G_V = \ker d_e(\varphi_V) = \mathrm{Hom}_\alpha(V, V)$$

On linéarise ici :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus \mathrm{End}\, k^d & & \\ \| & & \\ \mathrm{Lie}\, G_d & \xrightarrow{d_e(\varphi_V)} & \mathrm{Rep}\, \underline{d} \\ (f_i)_{i\in Q_0} & \longmapsto & f_{t(\alpha)} V_\alpha - V_\alpha f_{s(\alpha)} \end{array}$$

Donc :

$$\mathrm{Ext}^1_A(V, V) = [V, V]^1$$

$$= -q_Q(V) + [V, V]^0$$

$$= \dim \underbrace{\mathrm{Rep}_{\underline{d}}}_{\sum d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}} - \underbrace{(\dim(\mathrm{Lie}\, G_{\underline{d}}) - \dim \mathrm{Lie}\, G_V)}_{\text{dim de l'orbite}}$$

$\sum d_i^2$ orbite $\mathcal{O}_V$

et $[V, V]^1 = \mathrm{codim}\ \mathcal{O}_V$

Suite : Bright future with examples awaits