2013-11-28 - Caldero 2

Rappels

Carquoi

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\circ} \arrow[r] & \overset{2}{\bullet} & \overset{3}{\bullet} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dr] & \overset{4}{\bullet} \\ & & & \underset{5}{\bullet} \end{tikzcd}$$

Rep. de Carquoi

$$\begin{tikzcd} K^{d_1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & K^{d_2} \arrow[d, "\varphi_2"] & K^{d_3} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & K^{d_4} \\ K^{d'_1} \arrow[r] & K^{d'_2} & & K^{d_5} \end{tikzcd}$$

Mor.

Forme de Tits :

$$q(x_i)_{i\in Q_0} = \sum_{i\in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha\in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}$$

sur $\mathbb{R}^{Q_0}$

alg. de Carquoi $=$ $\mathbb{K}$-alg. de chemins

Espace de représentations :

$$\mathrm{Rep}_{\underline{d}} = \sum_{\alpha\in Q_1} \mathrm{Hom}\left(\mathbb{K}^{d_{s(\alpha)}}, \mathbb{K}^{d_{t(\alpha)}}\right)$$

$\underline{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$

A module $\longleftrightarrow$ Q-rep. sur $\mathbb{K}$

$$GL_{\underline{d}} = \prod_{i\in Q_0} GL_{d_i}(\mathbb{K}) \text{ agit sur } \mathrm{Rep}_{\underline{d}}$$

$$(g_i)\cdot(x_\alpha) = \left(g_{t(\alpha)} x_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1}\right)_\alpha$$

But : classifier les repr à isom. près

ça revient à classifier les orbites de l'action de $G_{\underline{d}}$

et aussi au calcul des indécomposables de A-modules.

$\mathrm{Ext}^1_A(X,X) =$ espaces conormal à l'orbite de X en X.

Coker $\quad = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}(X,X)$

$\qquad - \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Ext}^1(X,X)$

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

si B est projective

la suite longue

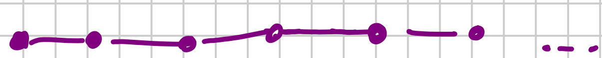
$$0 \to \mathrm{Hom}(C,D) \to \mathrm{Hom}(B,D) \to \mathrm{Hom}(A,D)$$
$$\to \mathrm{Ext}^1(C,D) \to \mathrm{Ext}^1(B,D)$$
$$\mathrm{Ext}^1(B,D) = 0$$

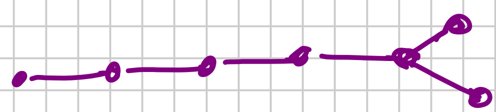
Thm de Gabriel $\quad$ CSSE

(i) q_Q est définie positive

(ii) Il existe un nombre fini d'indécomposables des Q-rep.

(iii) Les composantes connexes de Q sont de type A-D-E

A_n 

D_n 

E_6, E_7, E_8

$$\boxed{q_Q = \sum x_i^2 - \sum x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}}$$

Exemples

1) $\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet}$ $\quad A_2$

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$$

q est positive donc les indécomposables sont en nombre fini

$$Rep_{\underline{d}} = Hom(K^{d_1}, K^{d_2})$$

$$G_{\underline{d}} = G_{d_1} \times G_{d_2}$$

$$(g_1, g_2) \cdot X = g_2 \times g_1^{-1}$$

action

Matrices équivalentes ssi

elles ont de même rang

$$J_r = \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{matrix}}^{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{d_1} \updownarrow d_2$$

X vue comme Q-rep

$$\left.\begin{matrix} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \\ \oplus \; \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \\ \vdots \\ \oplus \; \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \end{matrix}\right\} r$$

$$\left.\begin{matrix} \oplus \; \mathbb{K} \longrightarrow 0 \\ \oplus \; \mathbb{K} \longrightarrow 0 \end{matrix}\right\} d_1 - r$$

$$\left.\begin{matrix} \oplus \; 0 \longrightarrow \mathbb{K} \\ \oplus \; \vdots \\ \oplus \; 0 \longrightarrow \mathbb{K} \end{matrix}\right\} d_2 - r$$

Donc il y a seulement 3 type de décomposables

$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \to 0$; $0 \to \mathbb{K}$

$$\mathbb{K} \xrightarrow{0} \mathbb{K} = \mathbb{K} \to 0 \oplus 0 \to \mathbb{K}$$

$$\mathrm{Ind}\, Q/\sim \;\longleftrightarrow\; \{\underline{d},\ q(\underline{d}) = 1\}$$

si $q(d)=1$ alors il y a un seul des indec.

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 1 \Rightarrow (x_1, x_2) = \begin{cases} (1,1) \\ (1,0) \\ (0,1) \end{cases}$$

On sait que

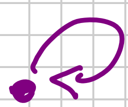
$$Rep_d = \bigcup_{r=0}^{\min(d_1,d_2)} O_r$$

O_r matrice de rang r

Exemple 2 (qui marche pas)

$$q_Q(x) = x^2 - x^2 \geq 0$$

sur $\mathbb{C}$ (il faut algébriquement clos)



$$\boxed{Rep_d = \mathrm{End}\,\mathbb{K}^d}$$

$GL_d(\mathbb{C})$ $\qquad g \cdot X = gXg^{-1}$

$d = 1$ $\qquad \mathbb{C} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}$ indecomp.

correspond à la diagonalization

$$\mathrm{Rep}_1 = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} O_\lambda \quad , \quad O_\lambda = \{\lambda\}$$

On a des indécomp. même quand $q(d) \neq 1$ (ici car $q(d) = 0$)

$$\underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{2}{\bullet} \longleftarrow \underset{3}{\bullet}$$

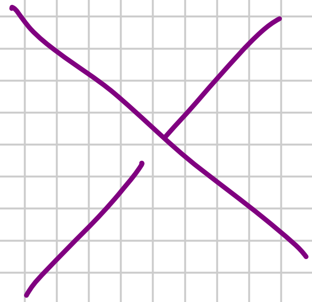
Ind on trouve : avec le théo. de Gabriel

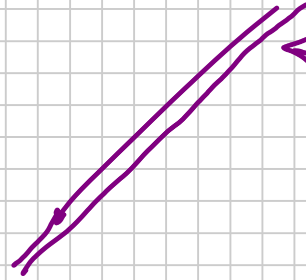
$(1,0,0)$
$(0,1,0)$
$(0,0,1)$
simples

$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \leftarrow 0 \qquad (1,1,0)$
$(0,1,1)$
$\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K} \qquad (1,1,1)$
non-simples

C'est lié à la géométrie à papa ? grand-papa ?

Comment classifier une paire de droites ? modulo le gp. de plan GL_2





les mêmes

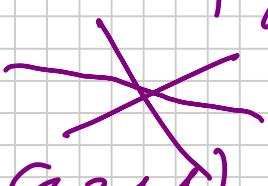
Cette classification revient à trouver les repr. de Q de $\alpha = (1,2,1)$ t.q. les flèches soient injectives

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^2 \longleftarrow \mathbb{K}$$

$(1,1,1) \oplus (0,1,0)$ et $(1,1,0)+(0,1,1)$

droites confondues — 2 droites distinctes.

Configuration de 3 droites dans un plan



$(1,2,1,1)$ | deux confondues $(1,1,1,0) \oplus (1,0,1,0)$ ou 3 confondues $(1,1,1,1) \oplus (0,1,0,0)$.

On peut toujours envoyer 3 droites distinctes sur 3 autres distinctes par un element de GL_2

Vu par les carquois: D_4

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r] & \mathbb{K}^2 & \mathbb{K} \arrow[l] \\ & \mathbb{K} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

de type fini selon la classific. de Gabriel

$\mathrm{Rep}_{\underline{d}}$ avec $\underline{d} = (1,2,1,1)$

unique indécomposable

Forme de Tits :

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r] & \overset{2}{\bullet} & \overset{4}{\bullet} \arrow[l] \\ & \underset{3}{\bullet} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$
$$- x_1 x_2 - x_3 x_2 - x_4 x_2$$

$q(1,2,1,1) = 1$!

un indecomp. :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & \mathbb{K}^2 & \mathbb{K} \arrow[l, "\binom{1}{1}"'] \\ & \mathbb{K} \arrow[u, "\binom{0}{1}"'] & \end{tikzcd}$$

Configuration de 4 droites du plan.

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] & \\ \bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l] \\ & \bullet \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{D}_4$ non positif !

un nombre infini des indecomp.

Il y a un invariant - birapport

$g(D_1, D_2, D_3, D_4) = (D'_1, \dots D'_4)$

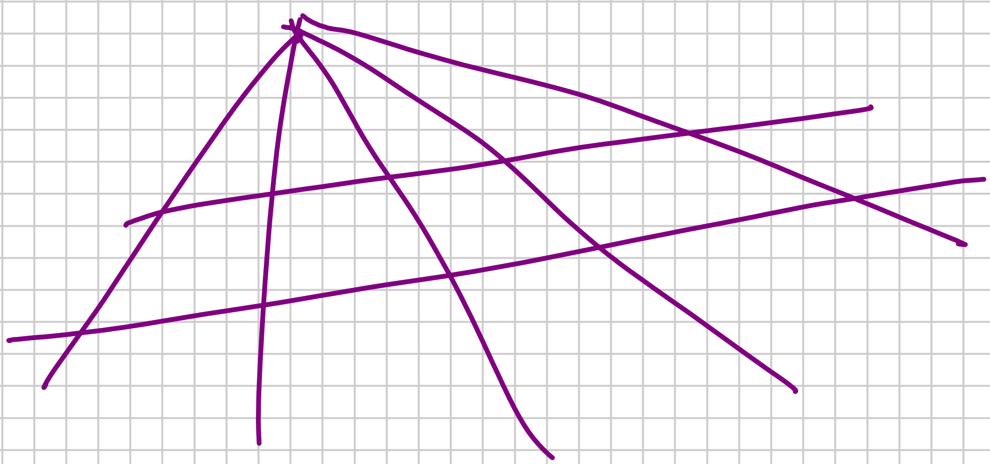
$\Longleftrightarrow$

$[D_1, D_2, D_3, D_4] = [D'_1, D'_2, D'_3, D'_4]$

quelconque dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$

(nombre infinie d'orbites (dense) sont classifié par le birapport)

$$\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} : \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}$$



Thm de Kac ms. cas positif non-définie