2013-12-12-Caldero

Théorème de Gabriel (suite)

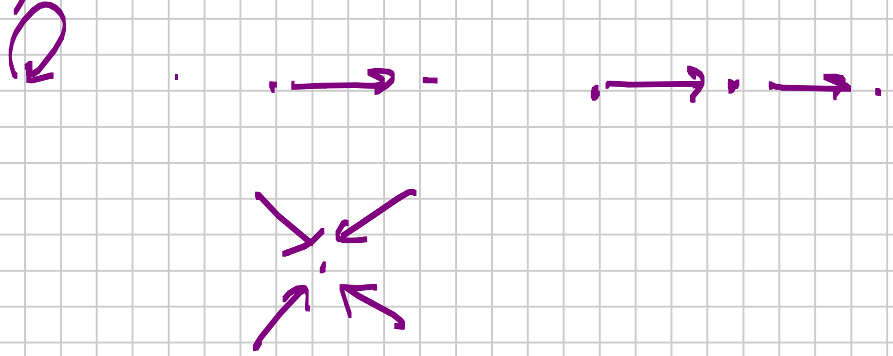
CSSE $\qquad \overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$

(i) q_Q est déf positive

(ii) Il n'existe qu'un nombre fini de rep. indécomposable des Rep_Q

(iii) les composantes connexes de Q sont de type A, D, E

Exemples:



Le cas échéant $\mathrm{Ind}_k Q \xrightarrow{\sim} \{\underline{d},\ q_Q(\underline{d})=1\} \subset \mathbb{N}^{Q_0}$

Rappel: Q - carquois:

Q_0 sommets

Q_1 - flèches

$x \in \mathbb{Z}^{Q_0} \rightsquigarrow$ forme de Tits:

$$q_Q(x) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}$$

$$V_{s(\alpha)} \xrightarrow{V_\alpha} V_{t(\alpha)} \qquad \underline{\dim} V = \underline{d}$$

$$q_Q(\underline{d}) = \dim \mathrm{Hom}_Q(V,V) - \dim \mathrm{Ext}^1_Q(V,V)$$

$$\mathrm{Rep}_{\underline{d}} = \bigoplus_{\alpha \in} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{d_{s(\alpha)}}, \mathbb{C}^{d_{t(\alpha)}})$$

$$G_d = \prod_{i \in Q_0} GL_{d_i}(\mathbb{C})$$

dim(ker) — codim(coker) est preservé.

<u>Idée de preuve</u>

(i)$\Longleftrightarrow$(iii) technique long, péjoré

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

Si q n'est pas déf positive alors on montre qu'il existe $\underline{d} \in \underline{\underline{N}}^{Q_0}$ t.q. $q_Q(\underline{d}) \leq 0$

c'est alors un vecteur de dimensions.

Notation:

$$[V,V]^0 = \dim \mathrm{Hom}_Q(V,V)$$

$$[V,V]^0 = \dim \mathrm{Ext}^1_Q(V,V)$$

$$[V,V]^1 = [V,V]^0 - q_Q(d) \geq [V,V]^0 > 0$$

(car il y a au moins $Id \in \mathrm{Hom}_Q(V,V)$)

donc $[V,V]^1 \geq \underline{1}$

On a vu que $[V,V]^1 = \mathrm{codim}\, G_{\underline{d}} \cdot V$

On a regardé la dimension

$$\dim G_d - \dim \mathrm{Stab}_V$$

$$= \sum d_i^2 - [V,V]^0$$

$$\mathrm{codim}_{G_d} V = \dim \mathrm{Rep}_{\underline{d}} - (\dim G_d - \dim \mathrm{Stab}_V)$$

$$= \sum_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} - \left(\sum d_i^2 - [V,V]^0\right)$$

Donc $\mathrm{Rep}_{\underline{d}}$ est une réunion

d'une infinité des orbites.

Il y a dans $\underline{\mathrm{Rep}_d}$ une infinité

de rep à isomorphisme près

S'il y avait un nombre fini d'indecomposables il y avait pour $\forall \underline{d}$ un nombre fini de repr.

$V \in \mathrm{Rep}_{\underline{d}}$

$V = \bigoplus W_k \Rightarrow \underline{d} = \sum_{k \in \mathbb{N}^{Q_0}} \underline{d}_k$

W_k - indec. de dim d_k

les $V \in \mathrm{Rep}_{\underline{d}}$ sont en nombre fini

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Si q_Q es def. positive alors

<u>Lemme de Ringel:</u> (pas simple)

<u>$[V, V]^0 = 1, \forall V$ - indecomposable</u>

<u>Contre-exemple:</u> $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - Jordan

Q

Revetement:

$$\begin{array}{ccc} V: \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ V: \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \end{array}$$

$q(x) = x^2 - x \cdot x = 0$

non-defini positif

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Jordan

$\mathrm{Hom}_Q(V,V) = \mathrm{Com}(J)$

commutant de Jordan

$\underline{\simeq} \quad \mathbb{C}[J] \simeq \mathbb{C}[x]/x^n$

polynôme en J (Jordan) $\qquad n = \dim \mathbb{C}^n$

$\Rightarrow [V,V]^0 = n$

$0 \leq [V,V]^1 = -q_Q(\underline{d}) + [V,V]^0$

$= 1 - q_Q(d) \leq 0$

lemme de Ringel

$\Rightarrow \quad q_Q(\underline{d}) = 1$

$\alpha : \mathrm{Ind}\, Q \xrightarrow{\dim} \{\underline{d}, q_Q(d) = 1\}$

$V \longmapsto \underline{\dim}\, V$.

α est injective :

V, V' indéc. avec $\underline{\dim}\, V = \underline{\dim}\, V' = \underline{d}$

$\underline{G_d} \cdot V$ et $\underline{G_d} \cdot V' \subset \mathrm{Rep}\, \underline{d}$
de codim 0 car $[V, V]^1 = 0$
contient des ouverts dense

Donc $\underline{G_d} \cdot V \cap G_d \cdot V' \neq \emptyset$

donc $V \simeq V'$

$\mathrm{Ind}_Q \subset \{ \underline{d},\ q_Q(d) = 1 \}$
$= \mathbb{N}^{Q_0} \cap S^{|Q_0|-1}$
discret — sphère compact

fini!

Surjectivité suit.

V algèbre de Hall

$\mathcal{A}$ - catégorie de Q-modules sur $\mathbb{F}_q$
(Q repr. sur $\mathbb{F}_q$)

$\mathcal{X} = \mathrm{Ob}(\mathcal{A})/\simeq$

$H_{\mathcal{A}} = \{ f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C} :$ à support fini $\}$

Thm de Hall
c'est une algèbre :
$\mathbb{C}$ espace et $*$

$$(f * g)(R) = \sum_{\substack{Q \subset R \\ \text{ssrep.}}} \langle R/Q, Q \rangle_m f(R/Q) g(Q)$$

somme fini car sur un corps fini.

$$\langle M, N \rangle_m = |\mathrm{Hom}_Q(M,N)|^{-1/2} |\mathrm{Ext}(M,N)|^{1/2}$$

$$\left(E \simeq \mathbb{F}_q^n \Rightarrow \#\text{d'éléments} = q^n \right)$$

∇ Thm de Ringel (généralisé ensuite)

Q est de type fini (A-D-E)

$$\mathcal{H}_{A_Q} \simeq U_q(\mathfrak{g}_Q)^+$$

[Historique: simply-laced - ADE

1) Cartan | Lie semi-simple sont de type

$\underbrace{A, D, E}_{\text{simplement lacée}} + BCFG$

Ringel

2) Gabriel: A, D, E Q-Repn. fini.

3) Fomin-Zelevinsky cluster alg. de type fini]

$\mathfrak{g}_Q$ - rep $\longleftrightarrow U(\mathfrak{g}_Q)$-rep.
alg. de Lie

$\wr \quad \uparrow q=1$

$U_q(\mathfrak{g}_Q)$-repn

q - indeterminé

Partie positive de $U_q(\mathfrak{g}_Q)$

$\mathfrak{g}_Q = \mathfrak{g}_Q^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_Q^-$

combinatoire quantique.

Prochain fois : les calculs dans l'alg. de Hall

$n \rightsquigarrow [n]_q = 1 + \dots + q^{n}$

$= |\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}|$

$n! \rightsquigarrow [n]_q! = \prod_{k=1}^{n} [k]_q = |\mathcal{F}l_n(\mathbb{F}_q)|$

drapeaux complets

où $\mathcal{F}l_n(\mathbb{K}) = \{ V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n, \dim V_i = i \}$

$\binom{n}{k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q [n-k]_q} = |Gr_{k,n}(\mathbb{F}_q)|$