2013-12-19 - Caldero 4.

Rappel:

Algèbre de Hall

$X = (\mathrm{Ob}\,\mathcal{A})/\sim$ - reps de Q = monoïde des indecomp.

$\mathcal{A}$ - catégorie de Q rep sur $\mathbb{F}_q$

(Q - carquoi)

$H_{\mathcal{A}} = \{ f : X \to \mathbb{C},\ \mathrm{supp}(f) \text{ fini} \}$

comme espace vect. $\langle [M], M \in X \rangle$ si

$[M]$ fonc. caract. de M i.e.

$[M] : M \to 1$, $N \to 0$ si $N \neq M$

Comme algèbre

$$(f * g)(R) = \sum_{\substack{Q \subset R \\ \text{sous rep}}} \langle R/Q, Q \rangle f(R/Q)\, g(Q)$$

où $\langle M, N \rangle = |\mathrm{Hom}(M,N)|^{1/2} \, |\mathrm{Ext}^1(M,N)|^{-1/2}$

cardinale est

$= q^{1/2([M,N]^0 - [M,N]^1)}$

(Remarque: 1/2 et -1/2 pas comme la dernière fois)

on pose $v = q^{1/2}$

Exemples

$\bullet$

Repn $\mathbb{K}^n$.

Ind $\mathbb{K}$.

$\bullet \longrightarrow \bullet$

matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{K} \xrightarrow{i} \mathbb{K}$

$\mathbb{K} \to 0$

$0 \to \mathbb{K}$

sous-catégorie repn. nilpotente

ensemble de partition

$D + N$

$N \sim \begin{pmatrix} J_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k} \end{pmatrix}$

J_{n_i} - block de Jordan

Pour une decomp. uniq.:

$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$

$\sum n_i = n$

Calculs préliminaires:

e.v. sur $\mathbb{F}_q$ $\sim \mathbb{F}_q^n$

$\{$Bases de $\mathbb{F}_q^n\}$

$GL_n(\mathbb{F}_q)$

coord q^n

$(q^n-1)(q^n-q^1)\dots(q^n-q^{n-1})$

$Gr_{m,n}(\mathbb{F}_q) = \{$ sev. de $\mathbb{F}_q^n$ de dim $m\}$

Stabilisateur de $\langle e_1 \dots e_m \rangle =$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{GL_m} & * \\ 0 & \boxed{GL_{n-m}} \end{pmatrix}$$

$Gr_{m,n}(\mathbb{F}_q) = GL_n / \mathrm{stab.} \langle e_1 \dots e_m \rangle$

$$\frac{|GL_n|}{|GL_m||GL_{n-m}|} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$$ nombre binomial quantique

En particulier,

$m=1$ $Gr_{1,n} = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q)$

$|Gr_{1,n}| = 1+q+\dots+q^{n-1} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = [n]_q$

<u>Exemple 1</u> Algèbre de Hall de ·

Comme espace engendré par

$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{F}_q}$ $[\mathbb{K}^n] = X_n$ – fonction caract.

algèbre de polynômes sur X.

$(X_1 * X_1)(\mathbb{K}^n)$

Seule possibilité :

$$0 \to \mathbb{K} \to \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \to 0$$

$\Rightarrow n = 2$ $\qquad \langle \underset{\mathbb{K}}{\mathbb{K}^2/Q}, Q \rangle = q^{1/2}$

$$(X_1 * X_1)(\mathbb{K}^2) = \sum_{\mathbb{K}^1 = Q \subset \mathbb{K}^2} \langle \mathbb{K}^2/Q, Q\rangle \, X_1(\mathbb{K}^2/Q) \cdot X_1(Q)$$

droite

$$\langle M, N \rangle = \nu^{[M,N]^0} = \nu^{\dim M \dim N}$$

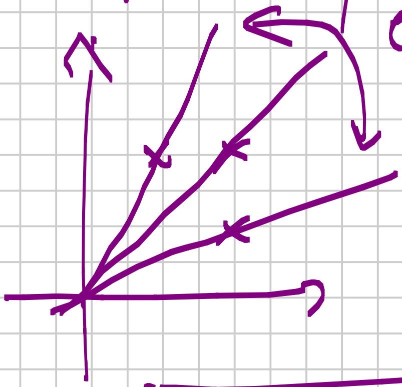
(il n'y a pas d'Ext^1)

donc $(X_1 * X_1)(\mathbb{K}^2) = \nu^{1\cdot 1}(1+\nu^2) X_2(\mathbb{K}^2)$

$1+q$ – # de droite dans $\mathbb{K}^2$.

de droites dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$

Exemple : $q = 3$



$$\frac{q^n - 1}{q-1} = 1+q$$

$n = 2$ e.v. $\mathbb{F}_q^2$

$$\boxed{X_1 * X_1 = \nu(1+\nu^2)\, X_2}$$

$$[M_1]*[M_2]*\dots*[M_r](R)$$

$$= \sum_{L_r\subset\dots\subset L_1=R} v^{\cdots}[M_1](L_1/L_2)\,[M_2](L_2/L_3)\dots[M_r](L_r)$$

ici: $\underbrace{X_1*\dots*X_1}_{r\ \text{fois}} = v^{\frac{r(r-1)}{2}}(1+v^2)(1+v^4)\dots(1+v^{2r})X_r$

L'algèbre de Hall est une algèbre de polynômes: $\boxed{H_A = \mathbb{C}[X_1]}$

$X_r = X_1^r / v^{r(r-1)/2}(1+v^2)\dots(1+v^{2r})$

(ici - pas d'Ext)

<u>Exemple</u> Alg. de Hall $\bullet \to \bullet$

indécomposables:

S_1 $\mathbb{K}\to 0$

S_2 $0\to\mathbb{K}$

P_1 $\mathbb{K}\to\mathbb{K}$

<u>Comme espace</u>

$H_A = \langle [S_1^{\oplus n_1}\oplus S_2^{\oplus n_2}\oplus P_1^{\oplus n_3}]\rangle$

$n_1, n_2, n_3\in\mathbb{N}$

S_1*S_1 - le même que pour le carquois Q (aussi S_2*S_2)

$[S_1]*[S_1] = v(1+v^2)[S_1^{\oplus 2}]$

$[S_2]*[S_2] = v(1+v^2)[S_2^{\oplus 2}]$

$$[S_2]*[S_1](R) = \sum_{Q\subset R}\langle R/Q, Q\rangle [S_2](R/Q)[S_1](Q)$$

$$0 \to S_1 \to R \to S_2 \to 0$$

$$\Rightarrow \underline{\dim} R = \underbrace{\underline{\dim} S_1}_{(1,0)} + \underbrace{\underline{\dim} S_2}_{(0,1)} = (1,1)$$

R est soit $\mathbb{K} \xrightarrow{0} \mathbb{K}$ $\quad S_1 \oplus S_2$

soit $\mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}$. $\quad P_1$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "0"] \arrow[d] & 0 \arrow[d, "0"] \\ \mathbb{K} \arrow[r, "0"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$ une seule injection possible.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "0"] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ \mathbb{K} \arrow[r, "1"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$ pas possible

Donc on a necessairement $R = S_1 \oplus S_2$

le nombre d'injection possible est $= 1$.

$$[S_2] * [S_1] = \langle S_2, S_1 \rangle_m [S_1 \oplus S_2]$$

où

$$\langle S_i, S_j \rangle_m = \nu^{\delta_{ij} - c_{ij}}$$

où

c_{ij} - # de fleches entre S_i et S_j

$$\langle S_2, S_1 \rangle_m = \nu^{0-0} = 1 \quad \text{donc}$$

$$[S_2] * [S_1] = [S_1 \oplus S_2]$$

$[S_1] * [S_2] (R) \neq 0$ si

$$S_2 \to R \to S_1 \to 0$$

$$R = P_1 \text{ ou } S_1 \oplus S_2$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbb{K} \arrow[d, hook, "\exists !"] \\
\mathbb{K} \arrow[r, "1"] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

injection

$$[S_1]*[S_2] = v^{-1}\left([S_1 \oplus S_2] + [P_1]\right)$$

Si Q est de type fini l'algèbre de Hall est isomorphe à l'algèbre quantique de carquois $\bullet \longrightarrow \bullet$

Thm Ringel : $\mathcal{H}_A = U_v(\mathfrak{g}_Q)^+$

On voit que on peut exprimer P_1 à partir de S_1, S_2 —

En générale, l'algèbre de Hall est engendré par S_i - les simples $\overset{0}{\bullet} \to \overset{0}{\bullet} \to \overset{\mathbb{K}}{\bullet} \to \overset{0}{\bullet} \ldots$

Relations de Serre quantiques :

$$[S_1]^{*2}*[S_2] - (v+v^{-1})[S_1]*[S_2]*[S_1] + [S_2]*[S_1]^{*2} = 0 \quad (*)$$

Formule générale des relations de Serre

$$\sum_{\ell=0}^{1-a_{ij}} (-1)^{\ell} \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ \ell \end{bmatrix} S_i^{\ell}\, S_j\, S_i^{1-a_{ij}-\ell} = 0$$

où $\boxed{-a_{ij} = c_{ij} + c_{ji}}$

Regarder pour voir qu'on a bien 0 dans $(*_2)$:

$$[S_2]*[S_1]^{*2} = [S_2]*\gamma(1+\gamma^2)[S_1^{\oplus 2}]$$
$$= \gamma(1+\gamma^2)[S_2\oplus S_1^{\oplus 2}]$$

(comme dans l'exemple $[S_2]*[S_1]$)

$$[S_1]^{*2}*[S_2] = \gamma(1+\gamma^2)[S_1^{\oplus 2}]*[S_2]$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{K} \arrow[d, "0"] \\ \mathbb{K}^2 \arrow[r, "0"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

morphismes possible de $\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}$: $[0\ 0]$ $[1\ 0]$ $Ob/\sim$

$S_1^{\oplus 2}\oplus S_2$ $\quad$ $S_1\oplus P_1$

dim R $=(2,1)$

$\begin{matrix}\mathbb{K}^2\to 0\\ 0\to\mathbb{K}\end{matrix}$ $\oplus$ $\qquad$ $\begin{matrix}\mathbb{K}\xrightarrow{1}\mathbb{K}\\ \mathbb{K}\xrightarrow{0}0\end{matrix}$ $\oplus$

Donc $[S_1]^{*2}*[S_2]$
$$=\gamma(1+\gamma^2)^{-2}\left([S_1^{\oplus 2}\oplus S_2]+[S_1\oplus P_1]\right)$$

$$[S]*[S_2]*[S_1] = [S_1]*\underbrace{[S_1\oplus S_2]}_{\text{sous-modules:}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbb{K} \arrow[d] \\ \mathbb{K}^2 \arrow[r] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

deux possibilités:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{K} \arrow[d, "\wr"] \\ \mathbb{K}^2 \arrow[r, "(0,0)"] & \mathbb{K} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{K} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{K} \arrow[d, "\wr"] \\ & \mathbb{K}^2 \arrow[r, "(1,0)"] & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} \arrow[from=1-2] & & \end{tikzcd}$$

$1+v^2$

$\mathbb{K}$ s'envoie sur le noyau

on reprend :

$$= (1+v^2)[S_1^{\oplus 2} \oplus S_2] + 1\cdot[S_1 \oplus P_1]\, v^{1-1}$$

$$\hookrightarrow H_A \cong U_v(\mathfrak{g}_Q)^+$$

il y a une bonne base qui se spécialise en $q=1$ (Lusztig : par faisceaux pervers)

Idées : $U_v(\underline{\mathfrak{g}_Q})$ $\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$

Catégorie dérivée de A, $D^b(A)$

shift $n \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{Ind} D^b(A) = \{[M][n]\}$$

Deux nilpotents :

$[M]$, $M[1]$ dans $D^b(A)/[2]$

partie $+$, partie $-$

caractère

$$H_{D^b(A)/[2]} \cong \{f : X \to \mathbb{C}[K_i^{\pm}]_{i \in Q}\}$$

$= U_q(\mathfrak{g}_Q)$

alg. clusters

$$\mathcal{C}_A = D^b(A) / [S]$$

foncteur de Serre

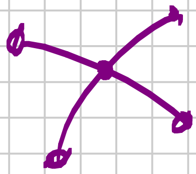
A de dim homologique $= 1$

Foncteur de type serre

t.q. on a

$$D\,\mathrm{Ext}^1(M,N) = D\,\mathrm{Ext}^1(N,M)$$

C'est une categorie Calabi-Yau

Géométriquement ça correspond aux intersections des diagonales.  des Ext.

Triangulations: Pas de Ext!

Creer une alg. de Hall

$H_{\mathcal{C}_A}$ (Caldero - Chapoton + Keller)

alg. clusters = alg. de Hall dans la categorie de C.Y.

Fonctions caracteristiques = Caractères

Objet de caractères $\rightsquigarrow$ Caractère

$$M \longmapsto [M]$$

<u>Encore une fois</u>: alg. de clusters sont les alg. de Hall de l'algèbre d'intersection de CY.