2014-01-30-Chapoton

But: Presenter la formule Caldero-Chapoton de calcul de variables amassées.

Rappel:

1 carquoi $\xrightarrow{\text{mutations}}$ des carquoi

1 variable/sommet $\xrightarrow{\text{mutation}}$ Ens. de variables poly de Laurent

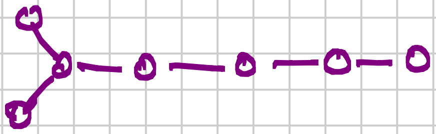
$$\begin{tikzcd} \underset{x_1}{\circ} \arrow[r] & \underset{x_2}{\circ} \arrow[r, squiggly, "\mu_1"] & \underset{\frac{1+x_2}{x_1}}{\circ} & \underset{x_2}{\circ} \arrow[l] \arrow[d, squiggly, "\mu_2"] \\ & & \underset{\frac{1+x_2}{x_1}}{\circ} \arrow[r] & \underset{\frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}}{\circ} \end{tikzcd}$$

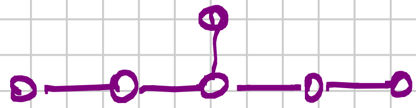
Aujourd'hui: on apprend comment obtenir les polynome de Laurent au bout de plusieurs mutations sans passer par des étaps intermédières

Carquoi Q (sans boucles, sans 2 cycles $\rightleftarrows$) sans cycles orienté

$M_{ij} = \#$ flèches $i \to j$ $- \#$ flèches $j \to i$

A 

D 

E 

\# fini des modules des incompos.
(thm. de Gabriel)

Bijection:
var. amassées $\longleftrightarrow$ indécomposables
(non initiales) de mod Q

$$\frac{1+x_1}{x_2} \qquad x_0^0 x_1^1 \qquad \underset{x_0}{0} \longrightarrow \underset{x_1}{\mathbb{C}}$$

$$\frac{1+x_2}{x_1} \qquad \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

$$\frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \qquad \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

vecteur de dim des indécomp.
correspond au dénominateurs

Dans l'autre sense:
retrouver le polynôme de
Laurent à partir de
représentation de carquois.

M — mod. (indécomposable)

ou pas en général

$\underline{m} = M$ $\qquad \bullet \longrightarrow \bullet \qquad \underline{m} = (1,1) \in \mathbb{N}^{Q_0}$

$$X_M = \sum_{\underline{e}} \chi(Gr_{\underline{e}} M) \prod_{i \in Q_0} x_i^{-\langle \underline{e}, \alpha_i \rangle - \langle \alpha_i, \underline{m}-\underline{e} \rangle}$$

$\underline{e}$ – mesure: sous-modules de M, donc

$\underline{e} < \underline{m}$

$Gr_{\underline{e}} M$ – var. alg. projective

Grassmannienne des sous-modules de dim $\underline{e}$ de M

<u>Exemple</u>

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \\ M: \mathbb{C}^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&0\end{bmatrix}"] & \mathbb{C}^3 \\ \mathbb{C} \arrow[u, hook] \arrow[r, "x"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{C} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$\underline{e} = (1,1)$

il suffit de donner

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \arrow[r] & \mathbb{C}^3 \\ \mathbb{C} \arrow[u, hook] & \mathbb{C} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$$Gr_{\underline{e}} M \subseteq \prod_{i \in Q_0} Gr_{e_i} M_i$$

ss-variété fermée
singulière

Reineke – toute variété alg. projective est de cette forme morale : variété peut être arbitrairement compliquée.

$\chi(Gr_e M)$ – char. Euler.
(peut être très compliqué à calculer, dans ce qui suit il y a les formules combinat.)

$\langle\, ,\rangle$ – forme d'Euler.

$$\langle\, ,\rangle : \mathbb{Z}^{Q_0} \times \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$$

forme bilinéaire (pas symétrique)

$$\langle a,b\rangle = \dim \operatorname{Hom}(A,B) - \dim \operatorname{Ext}(A,B)$$

si $a = \dim A$
$b = \dim B$

Soit (α_i) – base de $\mathbb{Z}^{Q_0}$

$(0,\dots,1,\dots 0)$

$$\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } i=j \\ -1, & \text{si } i \to j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(matrice de cette forme bilinéaire a que de $1, -1$ et 0)

$$\overset{1}{\circ} \longrightarrow \overset{2}{\circ}$$

$$\begin{array}{c|cc} & \alpha_i & \\ \hline \alpha_j & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple $1 \to 2 \leftarrow 3$

variables amassées

$= 3 + \#$ indecomp. de mod Q

Classe d'isom.

		m	sous-mod	e
S_1	$\mathbb{C} \to 0 \leftarrow 0$	$(1,0,0)$	0, S_1	$1 : x_1^{-1} + x_1^{-1} x_2$
S_2	$0 \to \mathbb{C} \leftarrow 0$			
S_3	$0 \to 0 \leftarrow \mathbb{C}$			
P_1	$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \leftarrow 0$		0	
P_3	$0 \to \mathbb{C} \xleftarrow{\sim} \mathbb{C}$	$(0\,1\,1)$	S_2	
I_2	$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \xleftarrow{\sim} \mathbb{C}$		P_3	•

Gabriel : en bijection avec les racines positives.

La forme bilinéaire

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ 3 & & & \end{array}$$

Calcul pour P_3

sous-modules de P_3 :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{C} \\ & 0 \arrow[u] & \mathbb{C} \arrow[u, "2"'] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

pas un sous-mod

Sous-modules sont 0, P_3, S_2

$$S_2 : \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{C} \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Charact. d'Euler :

$\chi(\mathfrak{S}) = 1$

$\chi(S_2) = 1$

$\chi(P_3) = 1$

O

P_3

S_2 : $\quad e = 010 = \alpha_2$

$\quad m - e = 001 = \alpha_3$

$1 \cdot x_1 \, x_2^{-1}$

$1 \cdot x_3^{-1}$

$1 \cdot x_1^{-(1+0)}$

x_2^{-1}

x_3

$$\prod_i x_i^{-(\alpha_2, \alpha_i) - (\alpha_i, \alpha_3)}$$

$$= x_1^{-(0+0)} \times x_2^{-(1+0)} \times x_3^{\overset{0}{-\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle} \overset{1}{-\langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle}}$$

$$= x_2^{-1} x_3^{-1}$$

Donc, on a la somme par des indecomp.

La réponse alors :

$$1 \cdot x_1 x_2^{-1} + 1 \cdot x_3^{-1} + 1 \cdot x_2^{-1} \cdot x_3^{-1}$$

$$= \frac{x_1 x_3 + x_2 + 1}{x_2 x_3}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 & 3 \arrow[l] \\ & 4 \arrow[u] & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \longleftarrow \mathbb{C}$$

$\underline{m} = (1,2,1,1)$

sous-modules

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ & 1 & \end{matrix} \ (\times 3)$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 2 & 0 \\ & 1 & \end{matrix} \ (\times 3)$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \ (\times 3)$$

$\begin{matrix} 0 & 2 & 0 \\ & 0 & \end{matrix}$ — Grassmannienne n'est plus un pt.

$$S_2 : \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{C}^2 & 0 \arrow[l] \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$$Gr_e(M) \cong \mathbb{P}^1, \quad \chi(\mathbb{P}^1) = 2$$

$e = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{matrix}$

coeff. sera 2.

Généralisation qui existent depuis :

Cas ADE étendu aux carquois quelconques

- aussi version quantique.

Propriétés :

$$X_{M\oplus N} = X_M X_N$$

$$X_A X_C = X_B + 1 \quad \text{si } 0 \to A \to B \to C \to 0 \text{ presque scindé.}$$

Frieze relation :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & \alpha \arrow[dr, dash] & \\ \beta \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \gamma \\ & \delta \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

$$\beta\gamma = \alpha\delta + 1$$