2014-02-13 - Iohara

Kenji: Lecture 1

§ Categorie $\mathcal{O}$

$\mathfrak{g}$ une alg. de Lie simple

$\cup$

$\mathfrak{h}$ - sous-alg. de Cartan

Δ - système de racines

$\cup$

Π une base $\rightsquigarrow$ Δ_+ - l'ens. des racines positives

$$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{-\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

Décomposition triangulaire

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}}_{\mathfrak{b}\text{ - Borel}} \oplus \mathfrak{n}_-$$

Def: La catégorie $\mathcal{O}$ aussi appelée (de BGG - Bernstein-Gelfand-Gelfand) est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{g}$-mod, $M \in Ob\,\mathcal{O}$

c'est à dire :

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$$

(pleine := morphismes sont les mêmes)

t.q.

(i) $M_\lambda = \{ m \mid h m = \lambda(h) m \quad \forall h \in \mathfrak{h} \}$

$\dim M_\lambda < \infty \quad \forall \lambda$

$$P(M) := \{ \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid M_\lambda \neq 0 \}$$

(ii) $P(M) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(\lambda_i)$

$n \in \mathbb{N}$ $\quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathfrak{h}^*$

$$D(\lambda) = \lambda - \mathbb{N}\Pi$$

$$= \{ \lambda - \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha \mid n_\alpha \in \mathbb{N} \}$$

<u>En particulier</u> : Pour $\mathfrak{sl}_3$: $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$

$D(\lambda) =$

$$* \lambda$$

$$\lambda - \alpha_1 * \qquad * \lambda - \alpha_2$$

$$\lambda - 2\alpha_1 * \qquad \lambda \overset{*}{-} \alpha_1 - \alpha_2 \qquad * \lambda - 2\alpha_2$$

etc. . . . .

<u>Exemples</u> : $\lambda \in \mathfrak{h}^*$

$\mathbb{C}_\lambda : \mathbb{C} v_\lambda \circlearrowleft \mathfrak{b}$ Borel agit comme suit :

$h v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda \quad , \quad \forall h \in \mathfrak{h}$

$\mathfrak{n}_+ v_\lambda = 0$

$M(\lambda) := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$

comme esp. vect. $= U(\mathfrak{n}_-)(1 \otimes \mathbb{C}_\lambda)$: $U(\mathfrak{n}_-)$ libre

où $U(\mathfrak{g}) = T\mathfrak{g}/J$, $J = \langle x \otimes y - y \otimes x - [x,y] \mid x, y \in \mathfrak{g} \rangle$

alg. univ. env.

Quotient par le module maximal

$L(\lambda) \twoheadleftarrow M(\lambda)$ le quot. irr.

$L(\lambda), M(\lambda) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{O}$

$P(M(\lambda)) = \lambda$

$x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $v \in M_\lambda \Rightarrow x \cdot v \in M_{\lambda+\alpha}$

$h(1 \otimes v_\lambda) = 1 \otimes h v_\lambda = \lambda(h) \cdot (1 \otimes v_\lambda)$

$h \in \mathfrak{h}$ $h(x \cdot v)$ on a $[h, x] \cdot v + x(h \cdot v)$.

donc :

$P(M(\lambda)) = \lambda - \mathbb{N}\Pi = D(\lambda)$

$\cup$

$P(L(\lambda))$

Exemple concret :

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

$\mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}f$.

$[h, e] = 2e$ $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$

$[h, f] = -2f$

$[e, f] = h$

$\mathfrak{h} = \mathbb{C}h \qquad \alpha \in \mathfrak{h}^*, \alpha(h) = 2$

$$\underset{\substack{\parallel \\ \mathfrak{n}_+}}{\mathfrak{g}_\alpha} = \mathbb{C}e, \quad \underset{\substack{\parallel \\ \mathfrak{n}_-}}{\mathfrak{g}_{-\alpha}} = \mathbb{C}f$$

$\lambda \in \mathfrak{h}^* \qquad \mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C}v_\lambda \circlearrowleft \mathfrak{b}$

$e v_\lambda = 0$

$h v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda$

$M(\lambda) = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_\lambda = U(\mathfrak{n}_-)(1 \otimes v_\lambda)$

$= \mathbb{C}[f] \qquad U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$

$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-)U(\mathfrak{b})$

$M(\lambda)$

$\cup$ **Define** comme suit :

$\boxed{u_i = \frac{1}{i!} f^i (1 \otimes u_\lambda)}, \quad i \in \mathbb{N}$

$f u_i = \frac{1}{i!} f^{i+1}(1 \otimes v_\lambda) = (i+1) u_{i+1}$

$h u_i = \frac{1}{i!} h f(f^{i-1}(1 \otimes v_\lambda))$

$$hf = [h,f] + fh$$

$$= -2u_i + \frac{1}{i!} f h f^{i-1}(1 \otimes v_\lambda)$$

Remark si $i=0$

$$h.(1 \otimes v_\lambda) = \lambda(h)(1 \otimes v_\lambda)$$

Donc $h.u_i = (\lambda(h) - 2i)\, u_i$

$$e u_i = \frac{1}{i!} e f^i (1 \otimes v_\lambda)$$

$$= \frac{1}{i!}\left([e,f] f^{i-1} + f e f^{i-1}\right)(1 \otimes v_\lambda)$$

$$= \frac{1}{i!}\left(h f^{i-1} + f\left([e,f] + fe\right) f^{i-2}\right)(1 \otimes v_\lambda)$$

$$f h f^{i-2} + f^2 e f^{i-2}$$

$$= \frac{1}{i!}\left(h f^{i-1} + f h f^{i-2} \cdots + f^{i-1} + \cancel{f^i e}\right)(1 \otimes v_\lambda)$$

0

$$= \left(\lambda(h) - 2(i-1)\right) + \left(\lambda(h) - 2(i-2)\right)$$

$$+ \cdots + \lambda(h) \frac{1}{i!} f^{i-1}(1 \otimes v_\lambda)$$

$$= i\left(\lambda(h) - i + 1\right) \frac{1}{i!} f^{i-1}(1 \otimes v_\lambda)$$

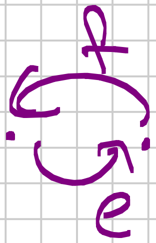
$$= \lambda(h) - i + 1\, u_{i-1}$$

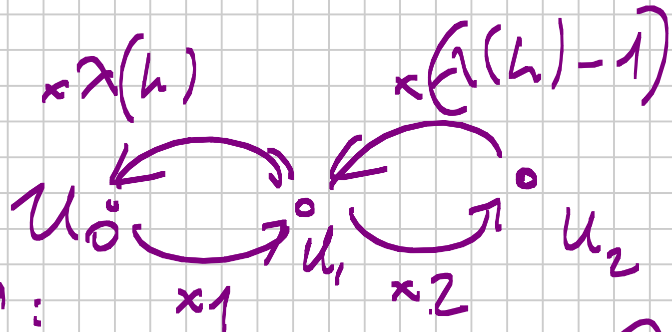
$$f.U_i = (i+1)\, u_{i+1}$$

$$h.U_i = (\lambda(h) - 2i)\, u_i$$

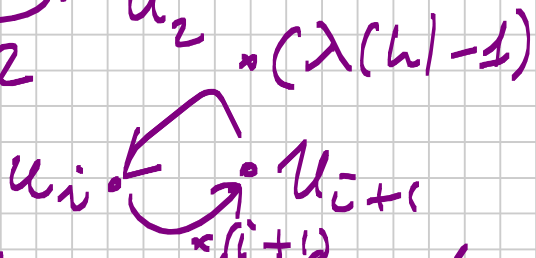
$$e . u_i = (\lambda(h) - i + 1)\, u_{i-1}$$
$$u_{-1} = 0$$

Exo. Quand est-ce que $M(\lambda)$ est irréd.





Calcul: En générale



Sous-modules de modules dans $\mathcal{O}$ sont aussi dans $\mathcal{O}$

Si $N \subset M(\lambda)$ un sous-module

$\exists i,\ u_i \in N$ (si $\lambda(h) \leq 0$ on peut aller

$\rightsquigarrow$ ∞ fois à gauche, sinon $\lambda(h) \in \mathbb{N}$, on doit s'arrêter)

$M(\lambda)$ red.

$\iff \lambda(h) \in \mathbb{N}$

$n := \lambda(h) \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow N = \bigoplus_{i>n} \mathbb{C}\, u_i$$

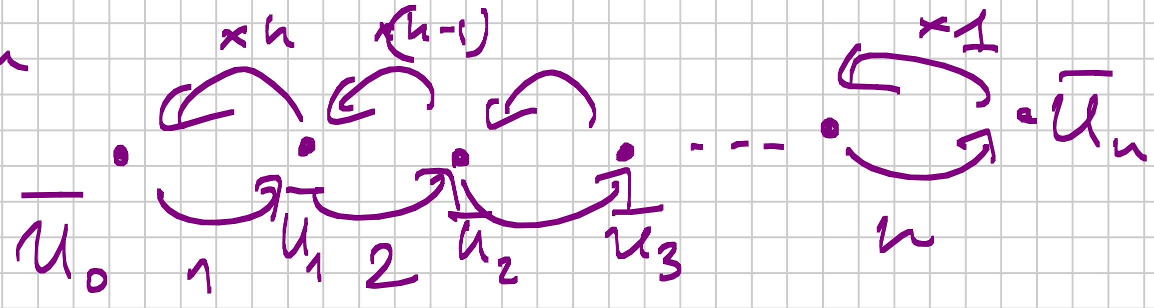
$\Rightarrow L(\lambda) = M(\lambda)/N \twoheadleftarrow M(\lambda)$

$\bar{u}_i \leftarrow\!\shortmid\ v_i$

L est irréductible.

action de e

de f



N est maximal
c'est la somme de tous les sous-modules

- **Décomposition de $\mathcal{O}$**

Une forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ sur $\mathfrak{h}^*$ induite par la forme de Killing

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$,

$$\Delta^\lambda := \left\{ \alpha \in \Delta \,\middle|\, 2\frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$W^\lambda := \{ r_\alpha \mid \alpha \in \Delta^\lambda \}$$ groupe de Weyl de réflexions

$$\Delta_+^\lambda := \Delta^\lambda \cap \Delta_+$$

$$\Pi^\lambda := \Delta_+^\lambda \setminus (\Delta_+^\lambda + \Delta_+^\lambda)$$

(racines qui ne se décomposent
pas en somme des autres
racines)

<u>Remk</u> $S^\lambda := \{ r_\alpha \mid \alpha \in \Pi^\lambda \} \in W^\lambda$

Δ^λ - un sous-sys de racines

W^λ, S^λ - un système Coxeter

$(r_\alpha r_\beta)^{m_{\alpha\beta}} = 1 \quad (\alpha\beta \in \Pi^\lambda)$

~~Déjà~~ A_2 - affine cas nontrivial
(see Moody, Pianzola)

$\sim$ rel. d'équivalence sur $\mathfrak{h}^*$

$\lambda \sim \mu \iff \mu = W^\lambda \circ \lambda$

$w \circ \lambda := w(\lambda+\rho) - \rho$

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$$

$\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}}$: la sous-catégorie $\lambda \in \mathfrak{h}^*$
pleine de $\mathcal{O}$
(les morphismes sont les mêmes que dans $\mathcal{O}$)

$M \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{O}_{\tilde{\lambda}} \iff$ i) $M \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{O}$

ii) $[M : L(\mu)] > 0$

$\Rightarrow \mu \in \tilde{\lambda}$

$M \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{O}$ (cas simple ou semi-simple)

$\Rightarrow$

$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r = \{0\}$

t.q. $M_i / M_{i+1} \simeq L(\lambda_i)$

$\exists \lambda_i$ chaque sous-module est irréd.

$\rightsquigarrow [M : L(\mu)] := \#\{i \mid \lambda_i = \mu\}$

<u>Thm.</u> "$\mathcal{O} = \bigoplus_{\tilde{\lambda} \in \mathfrak{h}^*/\sim} \mathcal{O}_{\tilde{\lambda}}$"

$\forall M \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{O} \quad \exists M_{\tilde{\lambda}} \in \mathcal{O}_{\tilde{\lambda}}$

t.q. $M = \bigoplus_{\tilde{\lambda} \in \mathfrak{h}^*/\sim} M_{\tilde{\lambda}}$ comme $\mathfrak{g}$-modules

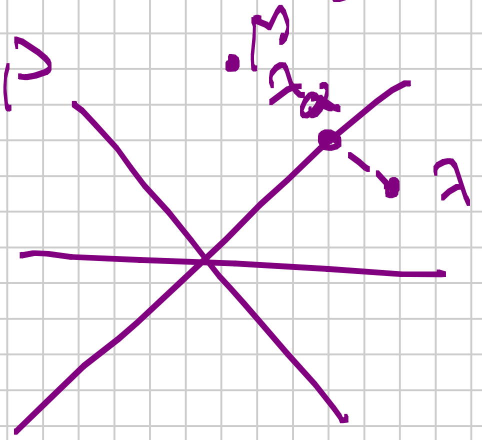
<u>Preuve :</u> Moody + Pianzola

La prochaine fois : 27/02

Pub : $T_\lambda^\mu : \mathcal{O}_{\tilde{\lambda}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{\mu}}$

avec $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$

$\lambda \in P$



$\boxed{T_{\lambda_\alpha}^{\mu} \cdot T_\lambda^{\lambda_\alpha}}$ wall-crossing functor