2014-03-13 - Manschot

Inv. de carquois et "wall-crossing"

Q_0 - sommets

Q_1 - flèches

source : $s : Q_1 \to Q_0$

but : $b : Q_1 \to Q_0$

$V_i \cong \mathbb{C}^{d_i}$

$f_a : V_{s(a)} \to V_{b(a)}$

$\vec{d} = (d_1, \dots d_{|Q_0|})$

$G_{\vec{d}} = \prod_{i \in Q_0} GL(d_i, \mathbb{C})$

Représentation

$F = (\{V_i\}, \{f_a\})$

$\forall i \in Q_0$

$\forall a \in Q_1$

Stabilité (King)

$\vec{\theta} \in \mathbb{R}^{|Q_0|}$

$$M(\vec{d}, \vec{\theta}) = M(\vec{d}) // \vec{\theta} \Big/ G_{\vec{d}}$$

$$= \mu^{-1}(\theta) // G$$

μ - moment map

Ensemble de repr. de dim d

pour

$//\vec{\theta}$ factoriser les singularité

$\left.\begin{array}{l}\vec{d} \text{ - primitive} \\ \vec{\theta} \text{ - générique}\end{array}\right\}$ espace est lisse compact.

$$\sum_{j, a: i \to j} f_a^+ f_a - \sum_{j, a:} f_a f_a^+ = \theta_i \mathbb{1}$$

$M(\vec{d},\vec{\theta})$ - espace de modules générique lisse et compacte

Invariants top. des espaces de modules

DT: $\underset{\text{(numérique)}}{\Omega}(\vec{d},\vec{\theta}) = (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} M(\vec{d},\vec{\theta})} \cdot \chi(M(\vec{d},\vec{\theta})) \in \mathbb{Z}$

motivique:

$\Omega(\vec{d}, y; \vec{\theta}) = y^{-\dim_{\mathbb{C}} M(\vec{d},\vec{\theta})} p(M(\vec{d},\vec{\theta}), y) \in \mathbb{Z}[y, y^{-1}]$

(polynôme de Poincaré symétrique $y \leftrightarrow y^{-1}$ invariant)

$\Omega(\vec{d}, -1, \vec{\theta}) = \Omega(\vec{d}, \vec{\theta})$ (motivique vs numérique)

Stabilité avec charge centrale

Bridgeland:

$Z: \Gamma \to \mathbb{C}$ applic linéaire

$\Gamma \cong \mathbb{Z}^{|Q_0|}$

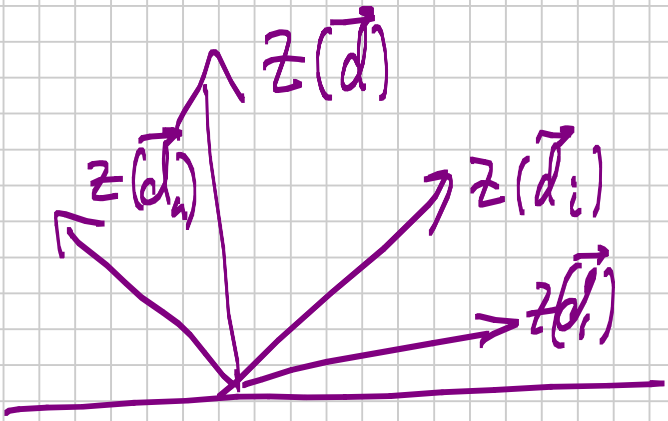
Γ engendré par des facteurs δ_i correspondant aux sommets

$Im(Z(\delta_i)) > 0$

$$\theta_i = Im\left(\frac{Z(\delta_i)}{Z(\sum d_i \delta_i)}\right)$$

Choix

$$\sum \vec{\theta} \cdot \vec{d} = 0$$



$$Z(\delta_1) = e^{-i\pi/}$$

Remplacer $\theta \rightsquigarrow Z$

DT : $\Omega(\vec{d}\,; Z) = (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} M(\vec{d},\theta)}$
$\chi(M(\vec{d},\theta)) \in \mathbb{Z}$

motivique : $\Omega(\vec{d}, y, Z)$

Pour les carquois - c'est un reparamétrage mais cela permet d'étendre la théorie aux fibrés vect. (?)

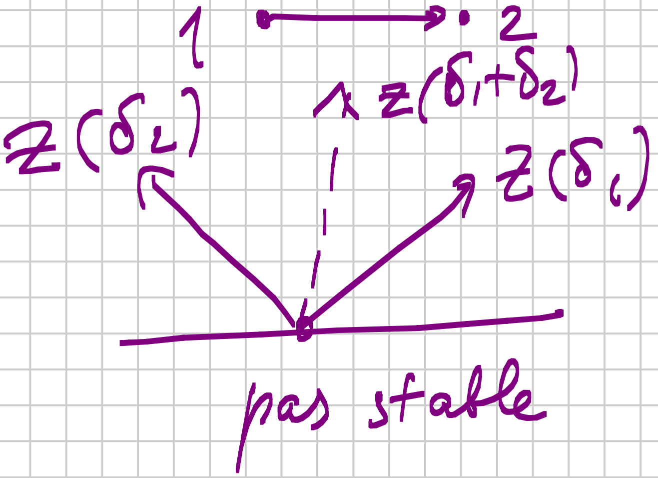
$F' \subset F$ - une repr.

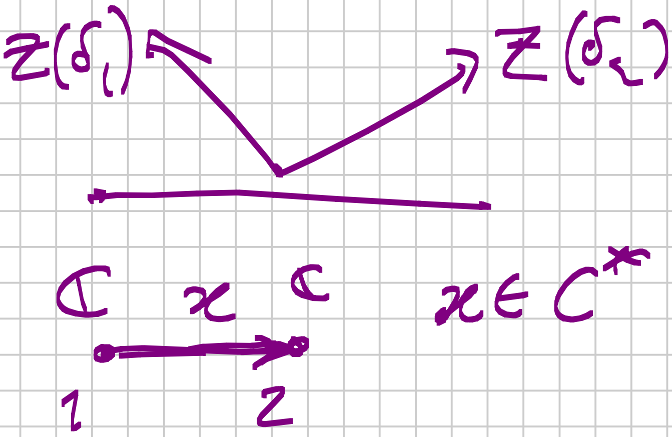
$$\arg(Z(\vec{d}')) \le \arg(Z(\vec{d}))$$

<u>Exemple:</u>

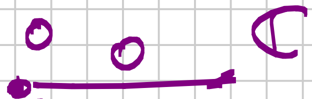
$\delta_1 = (1, 0)$ base canon.

$\delta_2 = (0, 1)$





$F' \subset F$



au moment quand $\arg(Z(\delta_1)) = \arg(Z(\delta_2))$ - phénomène de wall-crossing

Mur : Un mur $W(\vec{d})$ est un sous-espace de codim réelle 1 de l'espace des conditions de stabilité ($\mathcal{H}^{|Q_0|}$)

$$\mathcal{H} := \{ x \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(x) > 0 \}$$

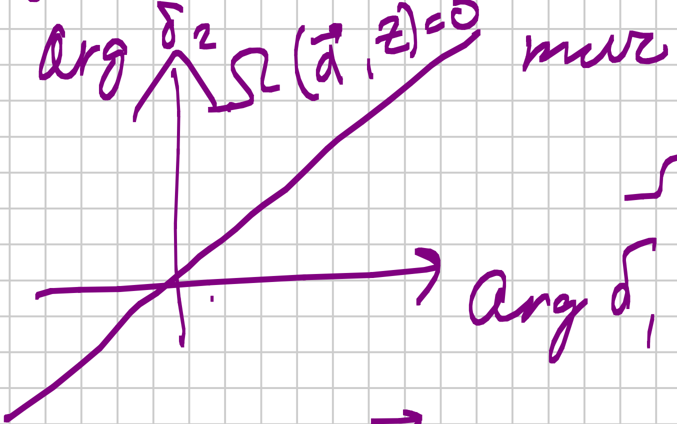
s'il existe $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ indép. t.q. $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = \vec{d}$ et

$$Z(\vec{d}_1) = \alpha Z(\vec{d}_2)$$

$\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ dans $W(\vec{d})$

→ arg est le même.

Les invariants $\Omega(\vec{d}, Z)$ change à travers du mur



On fixe $\vec{d} = (1,1)$

$$\Omega(\vec{d}, z) = 1$$

Fix $\vec{d}$ on regarde le mur. L'espace des murs est dense

Q: Comment décrire

$$\Delta\Omega\left(\vec{d} : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}'\right) \; ?$$

Formule de Kontsevich-Soibelman

Déf : alg. de Lie

engendrée par $\{e_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ avec les conditions

$$[e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}] = (-1)^{\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle} \langle\gamma_1,\gamma_2\rangle e_{\gamma_1+\gamma_2}$$

Forme anti-symétrique

$$\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle = \sum_{\substack{a\in Q_1 \\ s(a)=i \\ t(a)=j}} d_{1i}\, d_{2j} - \sum_{\substack{a\in Q_1 \\ s(a)=j \\ t(a)=i}} d_{1i}\, d_{1j}$$

$$\gamma = \sum d_i \delta_i$$

Exemple $\quad \underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{2}{\bullet}$

$\langle\delta_1,\delta_2\rangle = 1 \qquad e_{n\delta_1+m\delta_2}\,, \quad m,n\in\mathbb{Z}$

$$U_\gamma := \exp\left(-\Omega(\gamma, Z) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{e_{d\gamma}}{d^2}\right), \quad \gamma \in \Gamma$$

elt d'un gp.

l'ordre de argum.

$$A_{\mathcal{H}}(Z) = \prod_{\gamma \in Z^{-1}(\mathcal{H}) \cap \Gamma = \Gamma_+} U_\gamma$$

partie imaginaire

<u>Resultat</u> KS(2008)

$$A_{\mathcal{H}}(Z) = A_{\mathcal{H}}(Z')$$

$$\exp(e_{\delta_2}) \exp(e_{\delta_1})$$

$$= \exp(e_{\delta_1}) \exp(e_{\delta_1+\delta_2}) \exp(e_{\delta_2})$$

l'identité de pentagone de BKH

et après ça sera l'identité de dilog.

$$U_{\delta_2} U_{\delta_1} = U_{\delta_1} U_{\delta_1+\delta_2} U_{\delta_2}$$

En général : $\bullet \rightrightarrows \bullet$

$$U_{\delta_2} U_{\delta_1} = U_{\delta_1} \prod_{0 \leq n < m} U_{n\delta_1 + m\delta_2}$$

Calcul de Ω (et même Ω motivique avec des stacks)

Questions : Qu'est ce qui est calculé par Ω ?