2014-03-27-Manschot 2

Invariants DT

X – variété CY-3

$\mathcal{O}_X(1)$ – fibré vect. très ample

τ – stabilité de Gieseker
par rapport à $\mathcal{O}_X(1)$

$Coh(X)$ = categorie abelienne
de faisceaux coherents$/X$

Schema de modules

$\mathcal{M}_{ss}(\gamma,\tau)$, $\mathcal{M}_{st}(\gamma,\tau)$
semi-stables, stables

où γ = caractère de Chern
fixé
(analogue au vect. de dimen. pour les carquois
τ – analogue de θ)

* Thomas : Si $\mathcal{M}_{ss}(\gamma,\tau)=\mathcal{M}_{st}(\gamma,\tau)$
(en particulier, γ est indivisible

Défn. : $\Omega(\gamma,\tau) = \int_{[\mathcal{M}_{st}(\gamma,\tau)]^{vir}} 1 \quad \in \mathbb{Z}$

Thm Ce nombre est indépdt des déformations de X (changmt. de str-re complexe de X)

Behrend Thm : $\Omega(\gamma,\tau) = \chi(\mathcal{M}_{st}(\gamma,\tau))$ $(\in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ Joyce-Song : définissent $\bar{\Omega}(\gamma,\tau) \in \mathbb{Q}$ à partir d $\mathcal{M}_{ss}$

Gj : $\bar{\Omega}(\gamma,\tau) = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \mid \gamma}} \frac{1}{m^2} \Omega\left(\frac{\gamma}{m},\tau\right)$

où $\Omega\left(\frac{\gamma}{m},\tau\right)$ est défini et $\in \mathbb{Z}$

(Eg: $\bar{\Omega}(4,\tau) = \Omega(4,\tau) + \frac{1}{4}\Omega(2,\tau) + \frac{1}{16}\Omega(1,\tau)$)

Kontsevich-Soybelman

Invariants de DT motiviques $\Omega(\gamma, y, \tau)$

Charge centrale : $Z : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$

où Γ = reseau puis $K_0(X) \xrightarrow[\check{ch}(E)]{} \Gamma = \mathbb{Z}^n$

$\left(h = \dim H^{\text{pair}}(X)\right)$

Pour $(\delta_i)_{i=1 \text{ à } n}$ base de Γ fixée, exige $\mathrm{Im}(Z(\delta_i)) > 0$ $\forall i$

<u>Déf</u> Pour $\gamma = \sum_{i=1}^{n} n_i \delta_i \in \mathbb{N}\delta$

$\mathrm{arg}(E) := \mathrm{Arg}(Z(\gamma(E))) \in]0, \pi[$ pour E non-nul

$\left(E \in \mathrm{Coh}(X),\ \gamma = \text{caractère de Chern} \right)$

<u>Déf</u> - E est <u>(semi) stable</u> si $\forall F \subset E$ sous-objet non-nul

$\mathrm{arg}\, F \underset{(\leq)}{<} \mathrm{arg}\, E$

- <u>Mur</u> = Sev W dans l'espace des applications Z de codim réelle 1 [comme Z est déterminé par $Z(\delta_i) \in \mathcal{H}$, ça vit dans

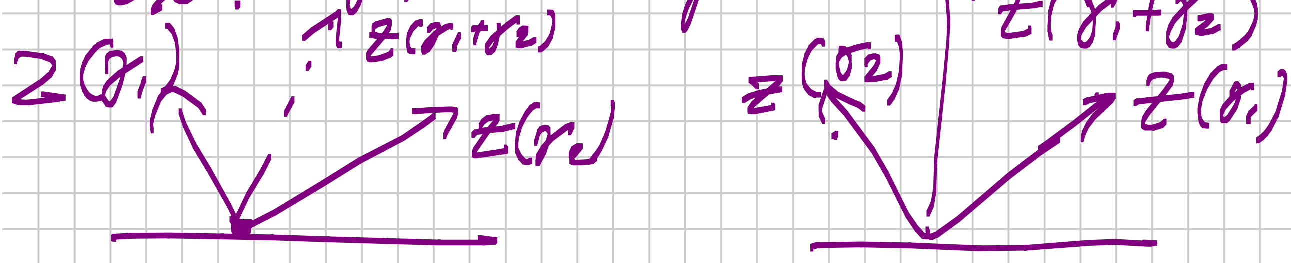
$\mathcal{H}^n \subset \mathbb{C}^n$] ½ plan de Poincaré

<u>Mur</u> : s.e.v. W de codim réelle 1 de l'espace de cond.

de stabilité (ici $\mathcal{H}^n$)

s'il existe γ_1, γ_2 linéairement indépendants t.q. $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ et $Z(\gamma_1) = \alpha Z(\gamma_2)$ pour $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$

Ex. $\gamma_1 + \gamma_2$ - pas stable:



$1 \leftarrow 2$

Repr stable	$(1,0)$	$(1,0)$
	$(0,1)$	$(0,1)$
		$(1,1)$

<u>Pb.</u> Comment déterminer

$$\Delta\Omega(\gamma, Z \to Z') = \Omega(\gamma, Z') - \Omega(\gamma, Z)$$

i.e. le changement de Ω lorsque l'on change la donnée de stabilité?

<u>Def.</u> alg de Lie $\mathfrak{g}$ engendrée par $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$

t.q. $[e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}] = (-1)^{\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle}\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle$

X est CY $\dim Ext^n(E,F)$
$= -\chi(F,E)$

Déf $U_\gamma := \exp\left(\Omega(\gamma, Z) \sum_{d\geq 1} \frac{e_{d\gamma}}{d^2}\right)$

$A(Z) = \prod^{\curvearrowright}_{\gamma \in Z^{-1}(\mathcal{H}) \cap \Gamma} U_\gamma$

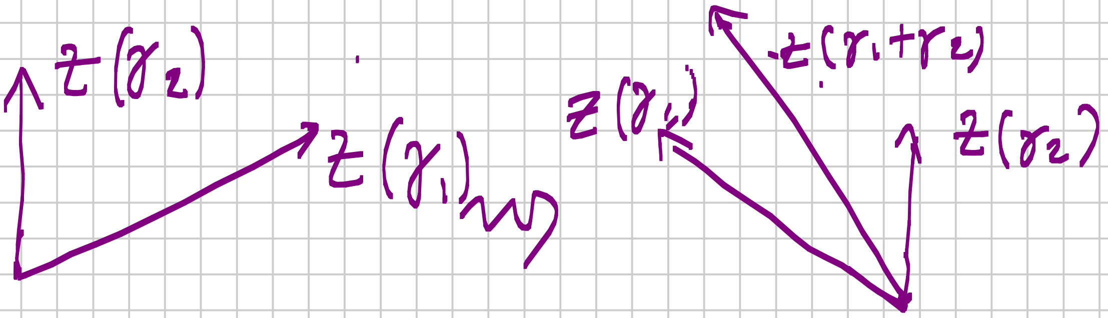
ordonnée par ordre d'argument
↘ (U_γ et $U_{\gamma'}$ commute si γ, γ' colinéaires)

$A(Z) = A(Z')$ $\forall Z, Z'$
- prouvée dans les nombreux cas particuliers

Déf : $V_\gamma := \exp \sum_{\ell \geq 1} \bar{\Omega}(\ell\gamma, Z) \cdot e_{\ell\gamma}$

(si on n'aime pas travailler avec $\Omega(\gamma, Z)$ pas définies, prend les V_γ)

Ex : A_2 : $\gamma_1 \longrightarrow \gamma_2$



Passe dans $\mathfrak{g} / \langle e_{m\gamma_1+n\gamma_2} \mid m,n \geq 2 \rangle$

Baker-Campbell-Hausdorff confirme que l'on a

$$\exp(e_{\gamma_2})\exp(e_{\gamma_1})$$
$$= \exp(e_{\gamma_1})\exp(e_{\gamma_1+\gamma_2})\exp(e_{\gamma_2})$$

Kontsevich-Soibelman :

- identité du pentagone non quantique

Version quantique $\rightsquigarrow$ dilogarithme quantique

à suivre...