2014-04-03 - Chapoton CY

Catégorie Calabi-Yau

Différents types de catégories dans la nature :

1. Catégorie k-linéaire k-corps

- Hom(X, Y) k-esp. v. composition bilinéaire
- $X \oplus Y$

Exemples modules sur une k-algèbre

Objet X - indécomp. si
$X \neq X_1 \oplus X_2$ avec $X_1, X_2 \neq 0$

2. Catégorie triangulaire

Cat $\mathcal{C}$ k-linéaire

- foncteur $\Sigma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ autoéquiv (décalage)
- classe de "triangles" "distingués"

Image à avoir en tête :

Complexe de A modules (A une k-algèbre)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to \cdots \to & M^p & \xrightarrow{d} & M^{p+1} & \xrightarrow{d} & M^{p+2} & \cdots & \longrightarrow \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\to \cdots \to & N^p & \to & N^{p+1} & \to & N^{p+2} & \cdots & \longrightarrow
\end{array}$$

où $(\Sigma M)^p = M^{p+1}$ $d_{\Sigma M} = -d_M$

alors on reprend :

Cat triangulés avec des axiomes :

* la classe de triangles distingués est close / isom.

* $\forall X$ $X \xrightarrow{id} X \to 0 \to \Sigma X$ est t.d.

* $\forall X \xrightarrow{f} Y$ $\exists$ un t.d.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$$

* si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ un t.d. alors

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \text{ t.d.}$$

* axiome octahédral

$\mathcal{C}$ cat triang.

| $\mathcal{C}$ - Hom-fini si $\dim_k \operatorname{Hom}(X,Y) < \infty$ $\forall X, Y$

Foncteur de Serre

$S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ auto-equivalence foncteur triangulé (envoie t.d. sur t.d.)

t.q. $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, SX)$

$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)^*$ k-esp. vect. dual

naturel en X et Y

* si S existe il est unique
* k-alg. A de dim finie et dim homol. finie
  ⇝ S existe sur $D^b A$-mod

$\mathcal{C} \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{C}$

$\mathcal{C} \xrightarrow{S} \mathcal{C}$ $\qquad d \in \mathbb{N}_{>0}$

<u>Def</u> $\mathcal{C}$ est Calabi-Yau

si $S \underset{\text{isom}}{\simeq} \Sigma^d$

$\mathcal{C} = D^b A$ mod

si on a une catégorie abélienne on a une notion d'Ext.

Ici, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \Sigma^d X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)^*$

$\overset{\shortparallel}{\mathrm{Ext}^d_{A\text{-mod}}(Y, X)}$.

Si la dim homologique est fini on sait que il y a un nombre fini de Ext non-nuls.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma^k Y, \Sigma^d X) = \mathrm{Hom}(X, \Sigma^k Y)^*$$

$$\parallel$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \Sigma^{d-k} X)$$

$$\parallel$$

$$\mathrm{Ext}^{d-k}(Y, X)$$

En particulier, si $d = 2$ on a $\mathrm{Ext}^1(X, Y) \cong \mathrm{Ext}^1(X, Y)^*$

<u>Comment cela peut être utile en géometrie?</u>

X - var alg. proj. lisse $/\mathbb{C}$

Coh. X - cat. de faisceaux coh.

$\int$ inclusion des objets

$\mathcal{D}^b \mathrm{Coh} X$ est triangulée $\mathbb{C}$-linéaire

$$H^k(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^k_{\mathrm{Coh}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_X, \Sigma^k \mathcal{F})$$

- cohomologie des faisceaux où

$\mathcal{O}_X$ - faisceau trivial

$\mathcal{F}$ - faisceau coh.

<u>Foncteur de Serre en géom.</u>

Faisceau canonique $\Lambda^{\dim H} T^*_X = K$

(section de fibré en droites)

T_X - faisceau cotangent

$$H^k(X, \mathcal{E}) = H^{n-k}(X, K \otimes \mathcal{E}^*)^*$$

$$\mathrm{Hom}_{D^b}(\mathcal{O}_X, \Sigma^k \mathcal{E}) = \mathrm{Hom}_{D^b}(\mathcal{O}_X, (\Sigma^{n-k} K \otimes \mathcal{E}^*)^*)$$

$$= \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \Sigma^{n-k} K)^*$$

$$= \mathrm{Hom}(\Sigma^k \mathcal{E}, \Sigma^n K)^*$$

$$? \longrightarrow \Sigma^n K \otimes ?$$

foncteur de Serre si $K = \mathcal{O}_X$

(n - la dim de X)

C'est une définition de variété Calabi-Yau :

K - faisceau trivial !

C'est l'origine de l'axiomatisation en termes de catégorie de CY.

K - faisceau trivial signifie qu'il existe une section nonnulle de K $\Leftrightarrow \exists$ n-forme volume.

Courbe elliptique est 1-CY.

$\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ dz - forme

$D^b\,\mathrm{Coh}\ \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ est 1-CY.

variétés Calabi-Yau : var. abeliennes

surface K3

(faisceau n'est pas ample)

Qu'est ce qu'on fait avec ?

Cat triangulée

$\longrightarrow$ catégorie dérivée A-mod

$\longrightarrow$ cat stable d'une cat. de Frobenius (cat. abelienne) en enlevant des objets

(Frobenius en gros: projective sont aussi injective)

"Image" d'une cat. triangulée

Carquois d'Auslander-Reiten

→ sommets = objets indécomposables

→ flèches = morphismes irréductibles

$X \xrightarrow{f} Y$ t.q. $f \neq g \circ h$.

__Exemples__

1. Q : $\overset{1}{\circ} \leftarrow \overset{2}{\circ}$

Repr. indécomp.

$\mathbb{C} \leftarrow 0 = S_1$

$0 \leftarrow \mathbb{C} = S_2$

$\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C} = M_{12}$

Carquois de AR de kQ-mod

$$\begin{tikzcd}
 & M_{12} \arrow[dr] & \\
S_1 \arrow[ur] \arrow[rr, bend left, "0"'] & \text{relation} & S_2
\end{tikzcd}$$

Image dans la categorie dérivée :

$$D^b = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \Sigma^n kQ\text{-mod}.$$

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}S_1 \arrow[dr] & & \Sigma^{-1}S_2 \arrow[dr] & & M_{12} \arrow[dr] & & \Sigma S_1 \arrow[dr] & & \Sigma S_2 \arrow[dr] & \\
 & \Sigma^{-1}M_{12} \arrow[ur] & & S_1 \arrow[ur] & & S_2 \arrow[ur] & & \Sigma M_{12} \arrow[ur] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

image de la cat dérivée

$0 \to S_1 \to M_{12} \to S_2 \to 0$ suite exacte courte non-scindée

Carquois d'AR de kQ-mod

$\mathrm{Hom}_{D^b}(S_2, \Sigma S_1) = \mathrm{Ext}^1_{kQ\text{-mod}}(S_2, S_1) \cong k$

Ce n'est pas encore CY : il y a un foncteur de Serre mais ce n'est pas la suspension

ici $\Sigma^2 = S$ - 2-CY catégorie

$\mathrm{Hom}(Y, SX) = \mathrm{Hom}(X, Y)^*$

S_1 a des morphismes :

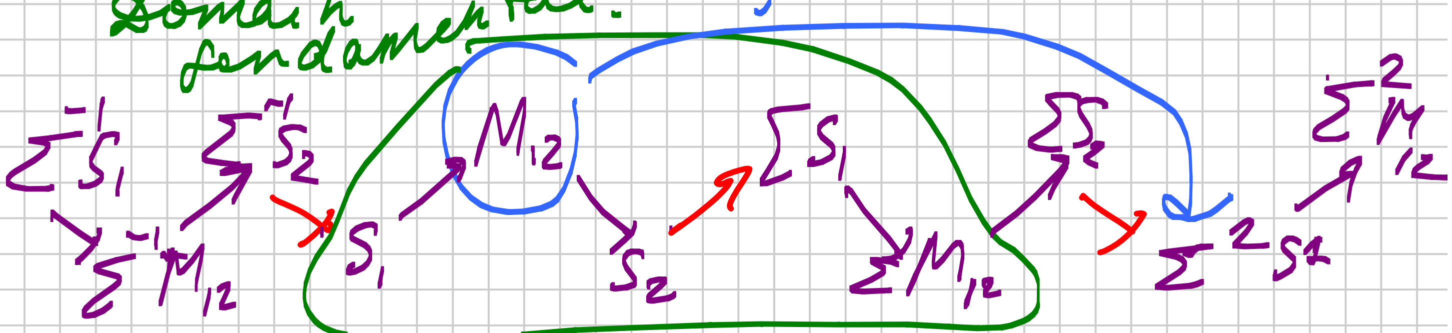
$S_1 \to S_1$

$S_1 \to M_{12}$

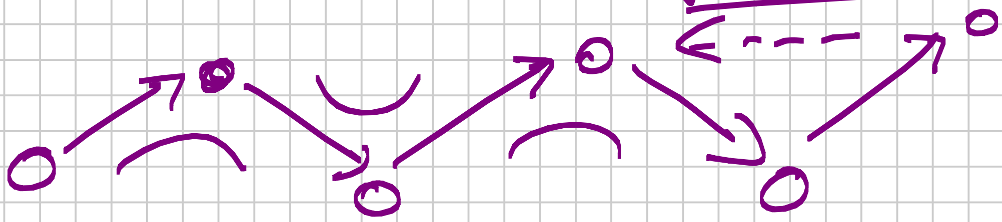
On impose ! pour que ça forme la catégorie CY foncteur de Serre ici : Σ_2

$SS_1 = M_{12}$ foncteur de Serre.

Domain fondamental :



fonct. de Serre



genre de liste de Möbius

B. Keller