2014-04-10-Manschot 3

Annonce :

3-5 sept

jmplyon2014.scienceconf.org

BPS ~~states~~ Hitchin systems and quivers

http://jmplyon2014.sciencesconf.org/

Kontsevich - Soibelman :

$$\Omega(\gamma, y; Z) = \sum \Omega_k(\gamma, Z)\, y^k \in \mathbb{Z}[y, y^{-1}]$$

$$\Omega(\gamma, y^{-1}; Z) = \Omega(\gamma, y^{-1}, Z)$$

$$\Omega(\gamma, y; Z) = y^{-\dim M} p(M, y)$$

dualité de poincaré

Formule de "wall-crossing" motivique $\quad y = q^{1/2} = e^{-\hbar}$

Limite classique $\quad q^{1/2} \to -1$

Algèbre : $\hat{e}_{\gamma_1} \hat{e}_{\gamma_2} = q^{1/2 \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle} \hat{e}_{\gamma_1 + \gamma_2}$

$\chi(E, F) = -\chi(F, E)$ - charactérist. d'Euler

dans la catégorie CY

$$e_\gamma = \lim_{q^{1/2}\to -1} \frac{\hat{e}_\gamma}{q-1}$$

on retrouve dans la limite classique

$$[e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}] = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle e_{\gamma_1+\gamma_2}$$

<u>Dilog quantique</u> :

$$\mathbb{E}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2/2} z^n}{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})}$$

$$= (-q^{-1/2}z, q^{-1})_\infty$$

$$(z,q)_\infty = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - zq^n)$$

$$(z, q^{-1})_\infty (qz, z)_\infty = 1$$

$$\lim_{\hbar\to 0} \mathbb{E}(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\hbar} Li_2(z) + \frac{z\hbar}{2(1-z)} + \dots\right)$$

dilog classique

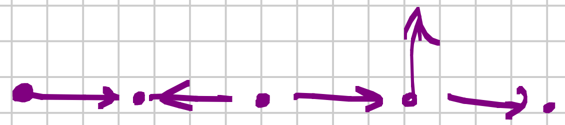
KS motivique

$$\hat{U}_\gamma = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left((-q)^{k/2}\hat{e}_\gamma\right)^{(-1)^{k+1}\Omega_k(\gamma,z)}$$

$$Li_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \text{ - dilog classique}$$

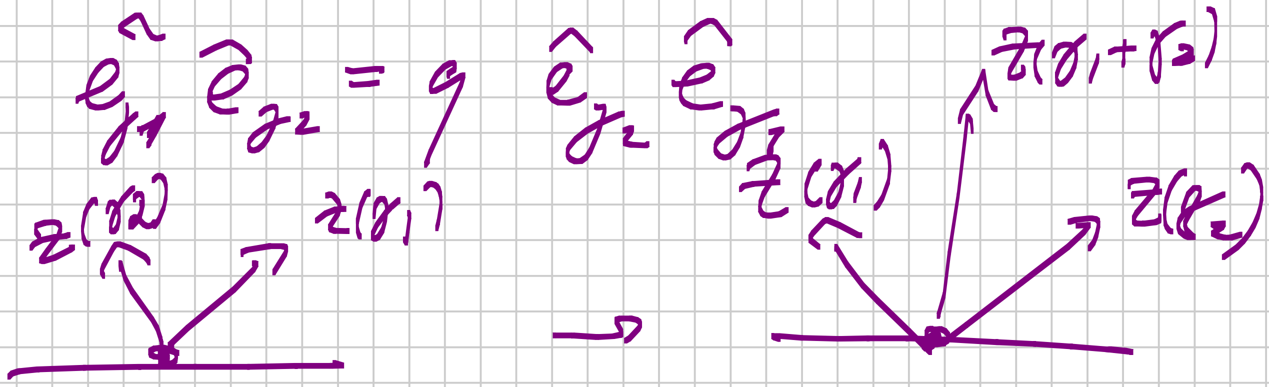
$$\hat{A}_{\mathcal{H}}(z) = \overset{\curvearrowleft}{\prod_{\gamma\in z^{-1}(\mathcal{H})\cap\Gamma}} \hat{U}_\gamma$$

Montrer Reineke's identities
(2010)
Pour les carquois de Dynkin



$A_2 \quad \bullet \longrightarrow \bullet$

$$\hat{e}_{\gamma_1}\hat{e}_{\gamma_2} = q\,\hat{e}_{\gamma_2}\hat{e}_{\gamma_1}$$



$$\Omega(\gamma_1, y; z) = \Omega(\gamma_2, y; z) = 1$$

$$\mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_2})^{-1}\,\mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_1})^{-1} = \mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_2})^{-1}\,\mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_2+\gamma_1})^{-1}\,\mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_1})^{-1}$$

Schutzenberger '53
Faddeev-Volkov '93

<u>Corollaire</u>

Source : sommet sans flèche entrants

source séquence

$\gamma_1 \dots \gamma_n$ t.q. γ_k est une source dans un carquois où on enlève $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$

$$\mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_1}) \cdots \mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_n}) = \mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_{i_1}})\, \mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_{i_2}}) \cdots \mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_{i_m}})$$

i_j - source séquence

Pour le dilog quantique on a :

la source sequence $\{1\}, \{1+2\}, \{2\}$

$$1 \rightrightarrows 2$$

$$\mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_2})^{-1}\, \mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_1})^{-1} = \mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_1})^{-1}\, \mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_1+\gamma_2})\, \mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_2})$$

$$\mathbb{E}((-q)^{-1/2}\hat{e}_{\gamma_1+\gamma_2})\, \mathbb{E}(-q\hat{e}_{\gamma_1+\gamma_2}) \cdots \mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_1+2\gamma_2})\, \mathbb{E}(\hat{e}_{\gamma_2})$$

$$\Omega((d, d+1), y; z) = \Omega(d+1, d), y, z) = 1$$

$d \geq 0$

$$\Omega((1,1), y, z) = y^{-1} + y$$

$N=2$ → boson W et dyon/monopole

$SU(2)$ symétrie.

Ω - l'invariant motivique de Donaldson-Thomas

Compte les pts dans l'espace de modules

Polynome de Poincaré

$\mathrm{Hom}(V(\alpha), V(\beta)) = 0$