Quelques modèles du plan hyperbolique

GT Algèbres amassées et applications

JG, 18/12/14

Birapport de quatre points

On fixe un corps $\mathbb{K}$.

Rappel : $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) = \left\{ z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d},\ ad-bc \neq 0 \right\}$ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$.

Proposition

Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ *agit transitivement sur les triplets de points distincts de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

Birapport de quatre points

On fixe un corps $\mathbb{K}$.

Rappel : $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc \neq 0 \right\}$ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$.

Proposition

Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ *agit transitivement sur les triplets de points distincts de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

L'unique homographie h qui envoie (z_1, z_2, z_3) sur $(\infty, 0, 1)$ est :

$$h(z) = \qquad\qquad \frac{z - z_2}{z - z_1}.$$

Birapport de quatre points

On fixe un corps $\mathbb{K}$.

Rappel : $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) = \left\{ z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d},\ ad-bc \neq 0 \right\}$ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$.

Proposition

Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ *agit transitivement sur les triplets de points distincts de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

L'unique homographie h qui envoie (z_1, z_2, z_3) sur $(\infty, 0, 1)$ est :

$$h(z) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \times \frac{z - z_2}{z - z_1}.$$

Définition

Le birapport de quatre points distincts (z_1, z_2, z_3, z_4) *est*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = h(z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \times \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}.$$

Permutations des quatre points

Proposition

Soit $\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4]$.

1. *Le groupe symétrique* $\mathfrak{S}_4$ *est le produit semi-direct du sous-groupe* $\mathfrak{S}_3$ *(agissant sur* $\{1, 2, 3\}$*) et du sous-groupe normal* $\mathfrak{K}$ *engendré par les doubles transpositions.*
2. *Le birapport* λ *est invariant par le groupe de Klein* $\mathfrak{K}$*.*
3. *L'orbite de* λ *sous le groupe symétrique* $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathfrak{S}_4/\mathfrak{K}$ *est :*

$$e \cdot \lambda = \lambda, \quad (123) \cdot \lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad (132) \cdot \lambda = \frac{-1}{\lambda - 1}$$
$$(12) \cdot \lambda = \frac{1}{\lambda}, \quad (23) \cdot \lambda = 1 - \lambda, \quad (13) \cdot \lambda = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

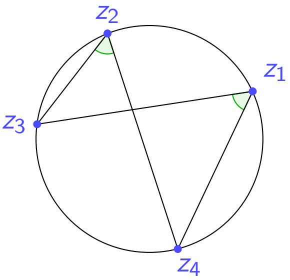
Exemple : $[z_1, z_3, z_2, z_4] = 1 - [z_1, z_2, z_3, z_4]$.

Critère de cocyclicité

Proposition

Soient z_1*,* z_2*,* z_3*,* z_4 *quatre points distincts de* $\mathbb{C}$*. Alors :*

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4 \text{ sont cocycliques ou alignés} \iff [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}.$$

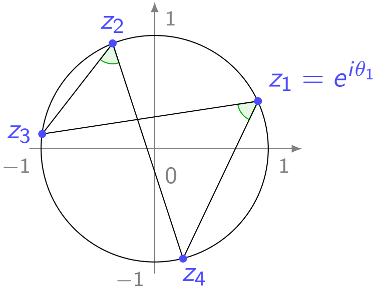


Critère de cocyclicité

Proposition

Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre points distincts de $\mathbb{C}$. Alors :

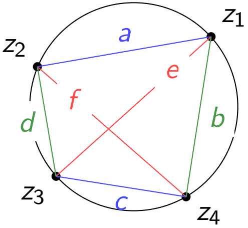
$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4 \text{ sont cocycliques ou alignés} \iff [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}.$$



$$\left[e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}, e^{i\theta_4}\right] = \frac{e^{i\theta_3} - e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_3} - e^{i\theta_2}} \times \frac{e^{i\theta_4} - e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_4} - e^{i\theta_1}} = \frac{\sin \frac{\theta_3 - \theta_1}{2}}{\sin \frac{\theta_3 - \theta_2}{2}} \times \frac{\sin \frac{\theta_4 - \theta_1}{2}}{\sin \frac{\theta_4 - \theta_2}{2}}$$

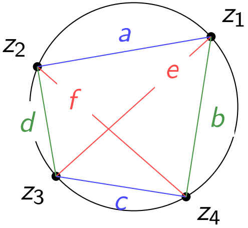
Théorème (Ptolémée)

$(z_i)_{1\leq i\leq 4}$ alignés ou cocycliques dans cet ordre SSI $ac + bd = ef$.



Théorème (Ptolémée)

$(z_i)_{1\leq i\leq 4}$ *alignés ou cocycliques dans cet ordre SSI* $ac + bd = ef$.



$$|z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4| + |z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_4|$$

$$\left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} \right| + \left| \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right| = 1$$

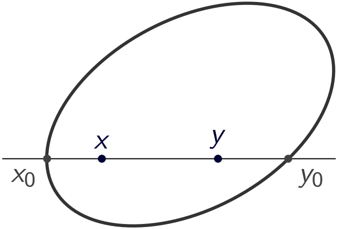
$$\left| [z_1, z_4, z_2, z_3] \right| + \left| [z_1, z_2, z_4, z_3] \right| = 1$$

On conclut par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire car...

$$[z_1, z_4, z_2, z_3] + [z_1, z_2, z_4, z_3] = 1.$$

Distance de Hilbert sur un ouvert convexe

Soit $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert convexe ne contenant pas de droite.

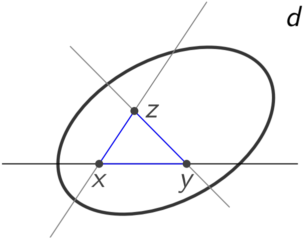


$$d(x,y) = \ln[x,y,y_0,x_0] = \ln \frac{y-x_0}{x-x_0}\,\frac{y_0-x}{y_0-y} \geq 0.$$

Proposition

L'application d ainsi définie est une distance.
Les géodésiques sont les segments.

$$\begin{cases} d(x,z) \\ d(z,y) \end{cases}$$

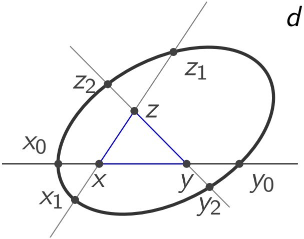


$$d(x,z) + d(z,y)$$

Proposition

L'application d ainsi définie est une distance.
Les géodésiques sont les segments.

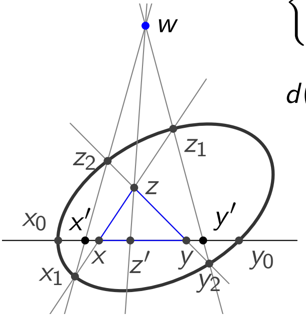
$$\begin{cases} d(x,z) = \ln[x,z,z_1,x_1] \\ d(z,y) = \ln[z,y,y_2,z_2] \end{cases}$$



$$d(x,z) + d(z,y)$$

Proposition

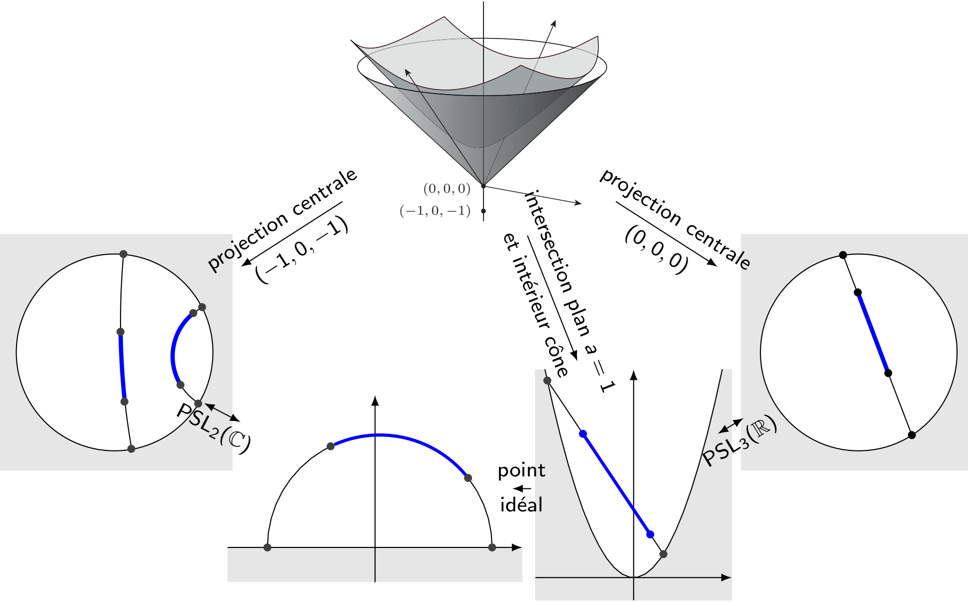
L'application d ainsi définie est une distance.
Les géodésiques sont les segments.



$$\begin{cases} d(x,z) = \ln[x,z,z_1,x_1] = \ln[x,z',y',x'] \\ d(z,y) = \ln[z,y,y_2,z_2] = \ln[z',y,y',x'], \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) \\ &= \ln \frac{z'-x'}{x-x'} \frac{y'-x}{y'-z'} \frac{y-x'}{z'-x'} \frac{y'-z'}{y'-y} \\ &= \ln \frac{y-x'}{x-x'} \frac{x-y'}{y-y'} \\ &\geq \ln \frac{y-x_0}{x-x_0} \frac{x-y_0}{y-y_0} = d(x,y). \end{aligned}$$

Cinq modèles du plan hyperbolique

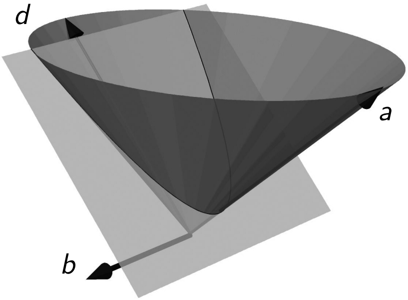


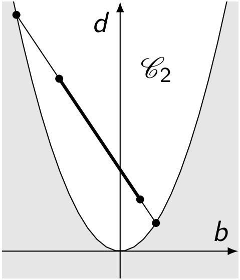
Structures conformes du plan

Cône des produits scalaires euclidiens dans $\mathbb{R}^2$:

$$\mathscr{S}_2^{++} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \;:\; a + d > 0,\; ad - b^2 > 0 \right\}.$$

Structures conformes : $\mathscr{S}_2^{++}/\mathbb{R}^{+*}$ – demi-droites !

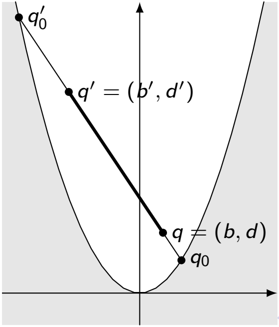




$$\mathscr{C}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & d \end{pmatrix} \;:\; 1 + d > 0,\; d - b^2 > 0 \right\}$$

L'intérieur de la parabole comme espace métrique

- Distance de Hilbert sur un convexe sans demi-droite.



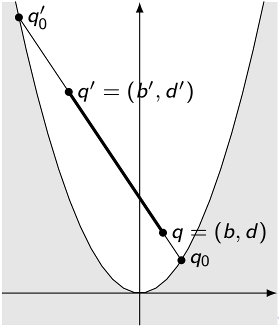
L'intérieur de la parabole comme espace métrique

- Distance de Hilbert sur un convexe sans demi-droite.
- Action linéaire de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ par congruence sur $\mathscr{S}_2^{++}$:

$$g \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix}.$$

- Action projective sur $\mathscr{C}_2$

$$g \cdot (b, d) = \left(\frac{b'}{a'}, \frac{d'}{a'} \right).$$



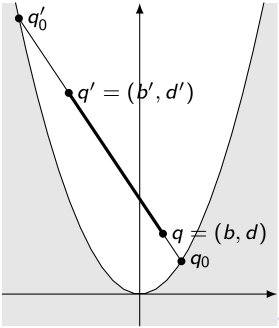
L'intérieur de la parabole comme espace métrique

- Distance de Hilbert sur un convexe sans demi-droite.
- Action linéaire de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ par congruence sur $\mathscr{S}_2^{++}$:

$$g \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix}.$$

- Action projective sur $\mathscr{C}_2$ par isométries !

$$g \cdot (b, d) = \left(\frac{b'}{a'}, \frac{d'}{a'} \right).$$



De la parabole $\mathscr{C}_2$ au demi-plan de Poincaré $\mathscr{H}$ (1)

Idée : considérer le cône isotrope de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2^{++}$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned} q_A(x,y) &= ax^2 + 2bxy + dy^2 \\ &= \frac{1}{a}\left(ax + \left(b + i\sqrt{ad - b^2}\right)y\right)\left(ax + \left(b + i\sqrt{ad - b^2}\right)y\right) \end{aligned}$$

D'où deux directions isotropes, les *points cycliques* :

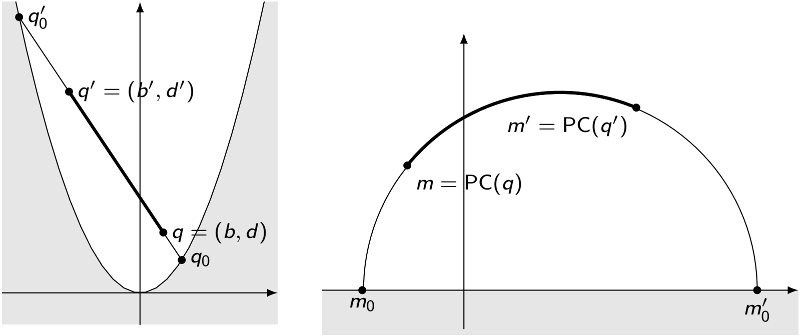
$$\left[a : -b \pm i\sqrt{ad - b^2}\right] = \left[1 : -\frac{b}{a} \pm i\sqrt{\frac{d}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right].$$

On choisit l'élément de $\mathbb{R}^{+*}A$ tel que $a = 1$ et le point cyclique qui a une partie imaginaire > 0.

De la parabole $\mathscr{C}_2$ au demi-plan de Poincaré $\mathscr{H}$ (2)

Considérer le cône isotrope (complexe) !

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{PC}: & \mathscr{C}_2 & \longrightarrow & \mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}\, z > 0\} \\ & (b,d) & \longmapsto & -b + i\sqrt{d - b^2} \end{array}$$



Métrique conforme sur le demi-plan de Poincaré

Définition

$$\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

est muni de la métrique

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2} = -4\,\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z}}{(z-\overline{z})^2}.$$

Sens : pour $\gamma : [0,1] \to \mathscr{H},\ t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$,

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)}\,\mathrm{d}t,$$

Lemme

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *agit sur* $\mathscr{H}$ *par isométries.*

- Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{H}$ car $\mathrm{Im}\,\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2}\,\mathrm{Im}(z)$.
- Pour $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et $\gamma : [0,1] \to \mathscr{H}$, on a : $\ell(g\cdot\gamma) = \ell(\gamma)$.

Évident pour $T_u : z \mapsto z+u$ ($u \in \mathbb{R}$ fixé).
Pour $S : z \mapsto -1/z$, on pose $z' = -\frac{1}{z}$, d'où $\mathrm{d}z' = -\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$ et :

$$\mathrm{d}{s'}^2 = -4\frac{\mathrm{d}z'\,\mathrm{d}\overline{z}'}{(z'-\overline{z}')^2} = -4\frac{\frac{\mathrm{d}z}{z^2}\,\frac{\mathrm{d}\overline{z}}{\overline{z}^2}}{\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}\right)^2} = -4\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z}}{(z-\overline{z})^2} = \mathrm{d}s^2.$$

D'où : $\ell(S\cdot\gamma) = \ell(\gamma)$.
On conclut car S et les T_u engendrent $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$
(${}^tT_u = ST_{-u}S^{-1}$ puis Gauss).

Géodésiques dans $\mathscr{H}$

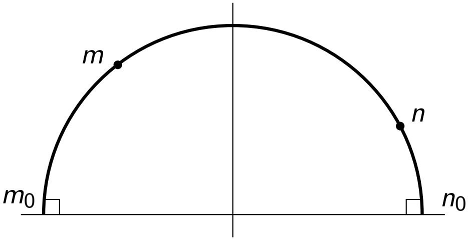
Définition

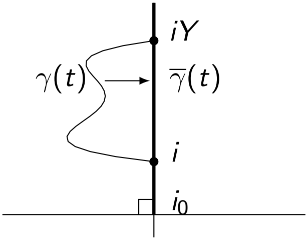
Géodésique de m à n : courbe γ qui réalise $\inf_\gamma \ell(\gamma)$.

Proposition

Les géodésiques sont sur les demi-droites verticales et les demi-cercles orthogonaux à $\mathbb{R}$. De plus,

$$d(m,n) = \ln\,[m, n, n_0, m_0].$$





De la parabole au demi-plan : cône isotrope (3)

Proposition

L'application « point cyclique »

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{PC}: & \mathscr{C}_2 & \longrightarrow & \mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z > 0\} \\ & (b,d) & \longmapsto & -b + i\sqrt{d-b^2} \end{array}$$

divise les distances par 2.

Pour $b = 0 = b'$ et $0 < d < d'$, voici les distances :

$$D_{\mathscr{C}_2}\big((0,d)(0,d')\big) = \ln[d, d', \infty, 0] = \ln \frac{d'}{d},$$

$$D_{\mathscr{H}}\big(\mathrm{PC}(0,d), \mathrm{PC}(0,d')\big) = \ln\left[i\sqrt{d}, i\sqrt{d'}, \infty, 0\right] = \ln \frac{\sqrt{d'}}{\sqrt{d}}.$$

De la parabole au demi-plan : cône isotrope (3)

Proposition

L'application « point cyclique »

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{PC} : & \mathscr{C}_2 & \longrightarrow & \mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}\, z > 0\} \\ & (b, d) & \longmapsto & -b + i\sqrt{d - b^2} \end{array}$$

divise les distances par 2.

Équivariance : $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & d \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} \mathrm{PC}(b,d) \\ 1 \end{pmatrix}$, $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$:

$$ {}^tZAZ = 0 \ \Rightarrow \ {}^t\left({}^tg^{-1}Z\right) gA{}^tg\left({}^tg^{-1}Z\right) = 0,$$

donc

$$\mathrm{PC}\big(g \cdot (b,d)\big) = {}^tg^{-1} \cdot \mathrm{PC}(b,d).$$

De la parabole au demi-plan : cône isotrope (3)

Proposition

L'application « point cyclique »

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{PC} : & \mathscr{C}_2 & \longrightarrow & \mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z > 0\} \\ & (b,d) & \longmapsto & -b + i\sqrt{d - b^2} \end{array}$$

divise les distances par 2*.*

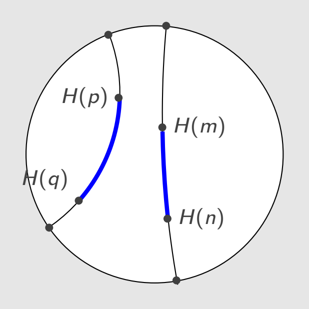
Pour (b,d) et (b',d') quelconques, soit $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ t.q. les colonnes de ${}^t g^{-1}$ sont des bases orthonormées de (b,d) et (b',d') :

$$\begin{aligned} D_{\mathscr{C}_2}\big((b,d),(b',d')\big) &= D_{\mathscr{C}_2}\big(g\cdot(b,d), g\cdot(b',d')\big) \\ &= D_{\mathscr{C}_2}\big((0,\widehat{d}),(0,\widehat{d'})\big) \\ &= 2D_{\mathscr{H}}\big(\mathrm{PC}(0,\widehat{d}),\mathrm{PC}(0,\widehat{d'})\big) \\ &= 2D_{\mathscr{H}}\big({}^t g^{-1}\cdot\mathrm{PC}(b,d), {}^t g^{-1}\cdot\mathrm{PC}(b',d')\big) \\ &= 2D_{\mathscr{H}}\big(\mathrm{PC}(b,d),\mathrm{PC}(b',d')\big). \end{aligned}$$

Disque de Poincaré

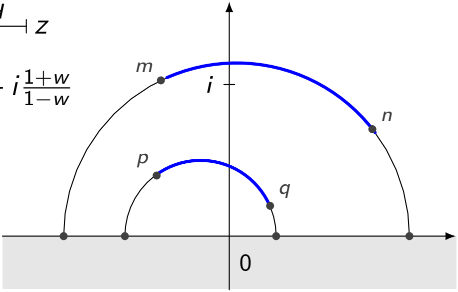
$$\mathscr{D} = \left\{ z \in \mathbb{C},\ \ |z| < 1 \right\}.$$

On a des biholomorphismes dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$:



$$\frac{z-i}{z+i} \xleftarrow{\ H\ } z$$

$$w \longmapsto i\,\frac{1+w}{1-w}$$



NB : Métrique conforme sur $\mathscr{D}$: $\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}\overline{z}}{\left(1-|z|^2\right)^2}$.

Disque de Klein

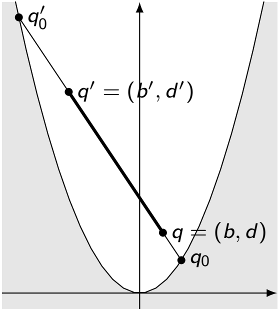
$$\mathscr{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\right\},$$

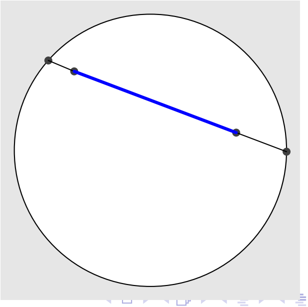
muni de la distance de Hilbert.

La transformation projective dans $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{R})$:

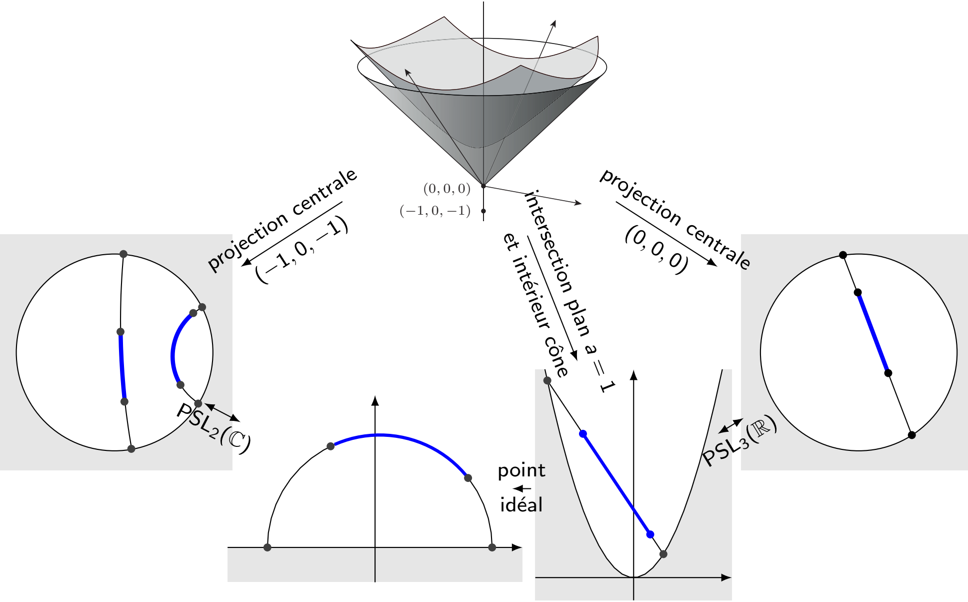
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2b}{d+1} \\ \frac{d-1}{d+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

envoie la parabole sur le disque de Klein :





L’hyperboloïde $\mathscr{Q}$: $ad - b^2 = 1$



Invariants pour cinq points ?

Connu :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^1)^4_{\mathrm{reg}} / \operatorname{PGL}_2 & \longrightarrow & X = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty, 0, 1\} \\ \operatorname{PGL}_2 \cdot (a, b, c, d) & \longmapsto & [a, b, c, d] \end{array}$$

Avec cinq points ?

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^1)^5_{\mathrm{reg}} / \operatorname{PGL}_2 & \longrightarrow & X^2 \setminus \left\{(x, x^{-1}),\ x \in X\right\} \\ \operatorname{PGL}_2 \cdot (a, b, c, d, e) & \longmapsto & ? \end{array}$$

On fixe $a, b, c, d, e \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ distincts. On pose

$$\bar{a} = [b, c, d, e]^{-1},\ \ \bar{b} = [c, d, e, a]^{-1}, \bar{c} = [d, e, a, b]^{-1},$$
$$\bar{d} = [e, a, b, c]^{-1},\ \ \bar{e} = [a, b, c, d]^{-1}.$$

Lemme

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = 1 - \bar{b}, \quad \bar{b} \cdot \bar{d} = 1 - \bar{c}, \quad \bar{c} \cdot \bar{e} = 1 - \bar{d}, \quad etc.,$$
$$\bar{b}\,\bar{d} \neq 1.$$

$$\frac{1}{[b, c, d, e]} \times \frac{1}{[d, e, a, b]} = [c, a, d, e] = 1 - \frac{1}{[c, d, e, a]}.$$

On fixe $a, b, c, d, e \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ distincts. On pose

$$\bar{a} = [b, c, d, e]^{-1},\ \ \bar{b} = [c, d, e, a]^{-1}, \bar{c} = [d, e, a, b]^{-1},$$
$$\bar{d} = [e, a, b, c]^{-1},\ \ \bar{e} = [a, b, c, d]^{-1}.$$

Lemme

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = 1 - \bar{b}, \quad \bar{b} \cdot \bar{d} = 1 - \bar{c}, \quad \bar{c} \cdot \bar{e} = 1 - \bar{d}, \quad etc.,$$
$$\bar{b}\,\bar{d} \neq 1.$$

$$\frac{1}{[b, c, d, e]} \times \frac{1}{[d, e, a, b]} = [c, a, d, e] = 1 - \frac{1}{[c, d, e, a]}.$$

Proposition

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}) = \left(\frac{1 - \bar{b}}{1 - \bar{b}\,\bar{d}},\ \bar{b},\ 1 - \bar{b}\bar{d},\ \bar{d},\ \frac{1 - \bar{d}}{1 - \bar{b}\,\bar{d}}\right).$$

Proposition

$$(\bar a, \bar b, \bar c, \bar d, \bar e) = \left(\frac{1-\bar b}{1-\bar b\,\bar d},\ \bar b,\ 1-\bar b\bar d,\ \bar d,\ \frac{1-\bar d}{1-\bar b\,\bar d} \right).$$

Corollaire

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & (\mathbb{P}^1)^5_{\mathrm{reg}} / \,\mathrm{PGL}_2 & \xrightarrow{1:1} & X^2 \setminus \left\{ (x, x^{-1}),\ x \in X \right\} \\ & \mathrm{PGL}_2 \cdot (a,b,c,d,e) & \longmapsto & (\bar b, \bar d) \end{array}$$

On ramène (c, d, e) à $(\infty, 0, 1)$ par $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ puis

$$\Psi(a, b, \infty, 0, 1) = \left(\frac{1}{a}, \frac{b-a}{b-1} \right).$$

NB :

$$\Psi\left(x, \frac{1-xy}{1-y}, \infty, 0, 1 \right) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right).$$

Un groupe diédral d'ordre 5

Proposition (Gauss)

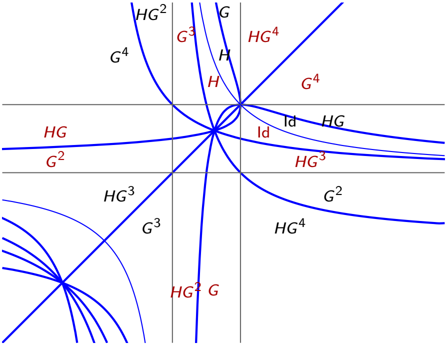
Soient

$$G: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (s,t) & \longmapsto & \left(t, \dfrac{1-s}{1-st}\right) \end{array} \quad \textit{et} \quad H: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (s,t) & \longmapsto & (t,s) \end{array}$$

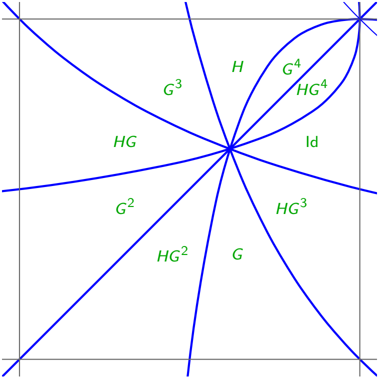
Alors $\langle G, H \rangle$ *est un sous-groupe diédral d'ordre* 5 *de* $\mathrm{Aut}\big(\mathbb{C}(x,t)\big)$.

Dém. :

$$(\bar{b}, \bar{d}) = \Psi(a,b,c,d,e) \implies \begin{cases} G(\bar{b},\bar{d}) = \Psi(c,d,e,a,b) \\ H(\bar{b},\bar{d}) = \Psi(e,d,c,b,a). \end{cases}$$



HG^2
G
G^3
HG^4
G^4
H
H
G^4
HG
Id
HG
Id
G^2
HG^3
HG^3
G^2
G^3
HG^4
HG^2
G



H
G^4
G^3
HG^4
HG
Id
G^2
HG^3
HG^2
G