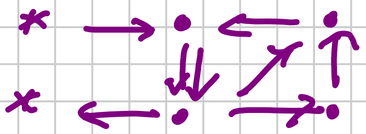
Plan $\boxed{\text{Grassmanniennes}}$

- Rappel : algèbres amassées
- Triangulations
- Grassmannienne $Gr_{2,n}$
  coordonnées de Plücker
- Structure amassée
- Positivité

Rappel :

Graine $\Sigma : (Q, \underline{x})$ où

Q-carquois



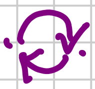
amas étendu $\underline{x}$ $\Big(\{\underbrace{x_1, \dots x_n}_{\text{variables amassées}}, \underbrace{x_{n+1} \dots x_m}_{\text{coeffts}}\}\Big)$

$c = \{x_{n+1}, \dots, x_m\}$

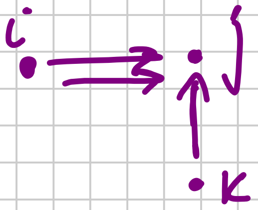
Pour $1 \le k \le n$ nouvelle graine :

$$\left(\mu_k(Q), \{x_1, \dots \hat{x}_k, \dots x_n, x_k', x_{n+1}, \dots x_m\}\right)$$

où $\mu_k(Q)$:

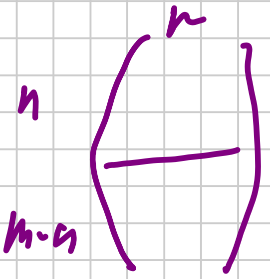
1. $j \to k \to l$ $\rightsquigarrow$ 
2. changer la direction 
3. Effacer  (si apparue)

Une autre façon de coder l'info:

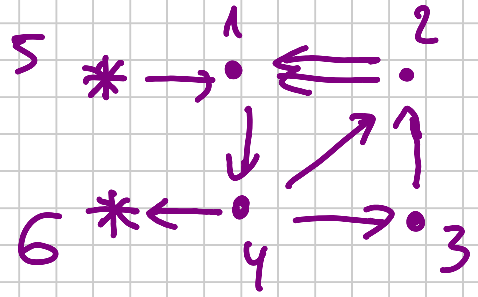


$$\Leftrightarrow \begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & 0 & 2 & 0 \\ j & -2 & 0 & -1 \\ k & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Matrice: B - matrice $m \times n$ construit à partir de carquoi

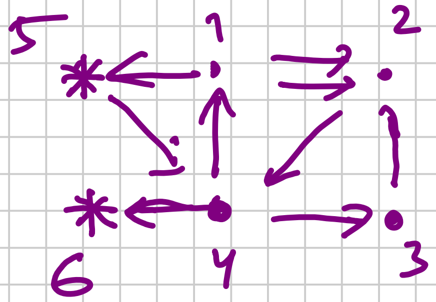


partie $n \times n$ - anti-symetrique entre les sommets mutables et partie $(n-m) \times n$ - gélé $\to$ mutable:



$$\rightsquigarrow B = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$\mu_1 \downarrow$



$$\rightsquigarrow \mu_1(B) = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\mu_k(b_{ij}) = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i=k \text{ ou } j=k \\ b_{ij} + \dfrac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} & \text{autrement} \end{cases}$$

L'ensemble de toutes variables amassées est obtenu par les suites de mutations :

<u>Défn</u> Alg. amassée $A(Q)$ est une $k[C]$ sous-algèbre de $\mathcal{F}$ engendré par toutes les variables amassées

$(k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q})$

Ici $\mathcal{F}$ un corps des fonctions rationnelles en m variables indep. sur $\mathbb{C}$

Une des application des alg. amassées est de trouver une base (en tant que espace vect.)

<u>Défn</u> Un monome amassé est un monome en variables amassées et coeffts avec un support dans le même amas étendu.

<u>Conj.</u> Monomes amassés dans une alg. amassées sont linéairem. depnt.

Triangulation des polygônes

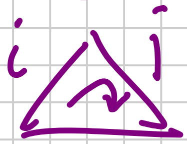
$T \rightsquigarrow$ Carquois ($\rightsquigarrow$ Matrice)

$(n+3)$-gône $\rightsquigarrow$ n diagonales $1, \dots, n$

+ segments du bord $n+1, \dots, m$

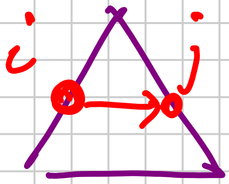
$(m = 2n+3)$

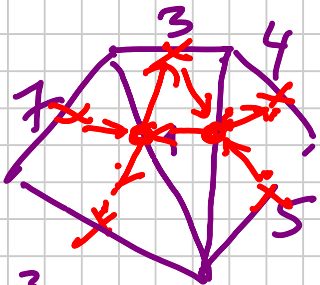
$B(T) = (b_{ij})$

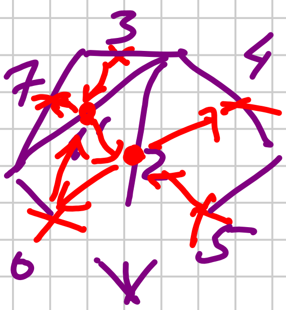
$b_{ij} = \#\{$triangles avec côtés i et j t.q. 

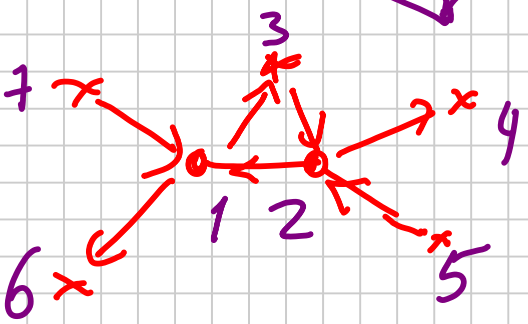
sens du montre $\}$

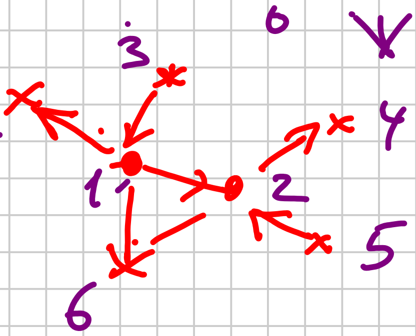
$- \#\{$ — " — contre sens — " — $\}$



Ex. $T =$ 

Flip en 1 



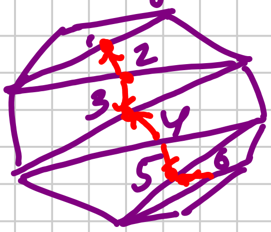


$$B(T) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}\begin{array}{c} \quad\ \ \Sigma \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \longmapsto \mu_1(B(T)) = \begin{array}{c} \\ 1' \end{array}\begin{array}{c} 1' \quad 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$x_1 x_1' = x_2 x_7 + x_3 x_6$$

$$x_2 x_2' = x_1 x_4 + x_3 x_5$$

Triangulation $\longrightarrow$ Dynkin diag.



$n+3$-gône

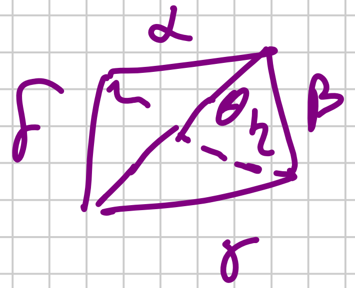
snake-like

A_n

$1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow 4 \rightarrow 5 \leftarrow 6$

Claim: Flip est la mutation de Q (ou B)

Rq: Pour tout quadrilateral



$$\theta \cdot \eta = \alpha\gamma + \beta\delta$$

Cette algèbre w. coeffnts associés à n-gône peut être identifié avec l'anneau des coordonnées (affine cone) sur $Gr_{2,n+3}$

Algèbre amassée A_n

La Grassmannienne

Soit V — un $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e.v. de dim n

La Grassmannienne $Gr_{k,n}$ = l'ensemble de sous-esp. de V de dim k.

Soit W — k-sous-esp. engendré par k vecteurs lin. indep. $\langle w_1, \dots, w_k \rangle$

<u>Remarque</u> Soient $w_1' \dots w_k'$ une autre base de W, avec une matrice de passage P. alors $w_1' \wedge \dots \wedge w_k' = \det P \cdot w_1 \wedge \dots \wedge w_k$

(en effet, si $(w_1', w_2') = (a w_1 + b w_2,\ c w_1 + d w_2)$ on a $w_1' \wedge w_2' = (a \cdot d - bc)\, w_1 \wedge w_2$)

Dans une base $e_1, \dots, e_n$ de V

$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ — les vecteurs dans W est décrit par une $k \times n$ matrice $A(W) = (a_{ij})$

Deux $k \times n$ matrices representent le même element de $Gr_{k,n}$ si on obtient un à partir de l'autre en multipliant a gauche par une matrice $k \times k$.

Soit $I \in \binom{[n]}{k}$ – partie de k éléments parmi n

On note $\Delta_I(v)$ le mineur $k \times k$ de $A(v)$ correspondant aux colonnes indexées par I.

Plücker cord. $p_I(A) :=$ det de sous-matrice de A en colonnes I

Pour $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ on note $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$

e_I et Δ_I sont des base duales

$$\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$$

Exemple: $A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix} \end{array}$ numéro de colonne

$p_{34}(A) = ad - bc$

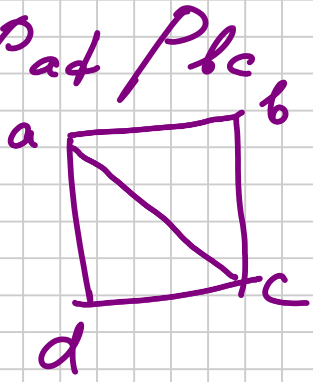
Pour $Gr_{2n}(\mathbb{C})$ les coordonnes de Plücker sont les

$p_{ij}(A) =$ dét de 2×2 sous-matrice A en colonnes i, j

L'anneau de coordonnées $\mathbb{C}[Gr_{2,n}]$ est engendré par les coord. de Plücker soumis aux relations :

$$p_{ac}\,p_{bd} = p_{ab}\,p_{cd} + p_{ad}\,p_{bc}$$

$a < b < c < d$

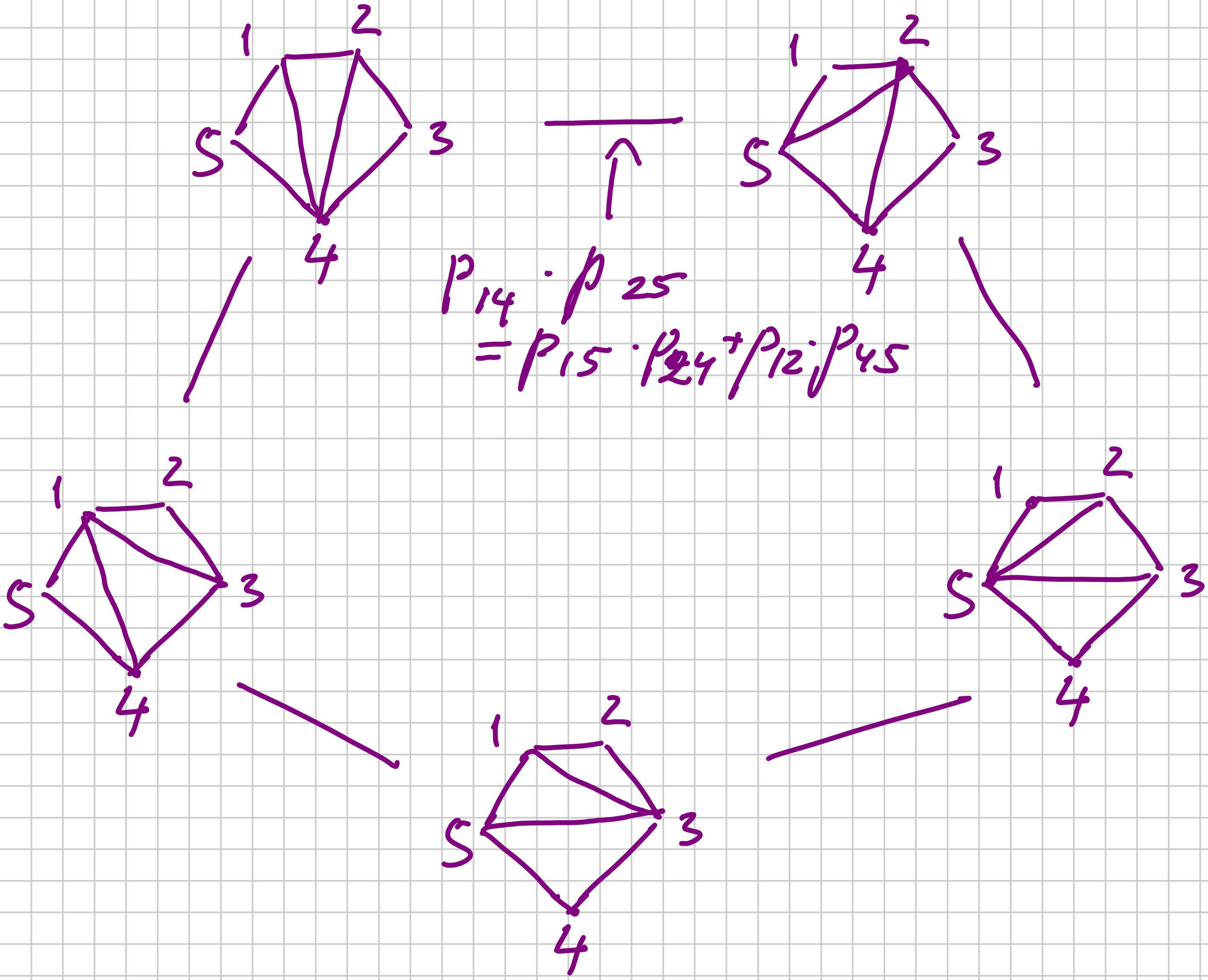


C'est exactement les relations d'échange de A_{n-3}

Graph d'echange de A_{n-3} est le graphe avec les sommets correspondant aux triangulations connectés par des flips.

<u>Ex</u>: anneau des coordonnées de $Gr_{25}(\mathbb{C})$ est engendré par

$p_{12}, p_{13}, \dots, p_{45}$ et relations (de Plucker)



En general : le graph d'echange de A_n est le 1-skelette de polytope associahedron

Pour A_n : les monomes amassée = {monomes en coord de Plücker avec un support sur une triangulation}

eg. $p_{14}^3 p_{15} p_{34}^2 p_{24}$ si

$p_{14} p_{25}$ – non !

<u>Thm</u> (théorie d'invariants du 19ème siècle)
Monomes amassée de $A_{n-3} = \mathbb{C}[Gr_{2,n}]$ formes une base additive de A_{n-3}

– <u>Positivité totale et alg. amasées</u>

<u>Déf</u> La partie totalement positive de $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ $(Gr_{k,n})_{>0}$ est un sous-ensemble de $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ où toutes les coord. de Plücker sont positives

Q : Soit $A \in Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ combiens de coord. de Plücker (et lesquelles) il faut tester pour déterminer si A est dans $(Gr_{k,n})_{>0}$

minimal test ?

Peut être utile : $\mathbb{C}[Gr_{k,p}]$ a une str-re d'alg amassée de rank (taille d'amas) $(k-1)(p-k-1)$ avec n variables coeff. (J. Scott)

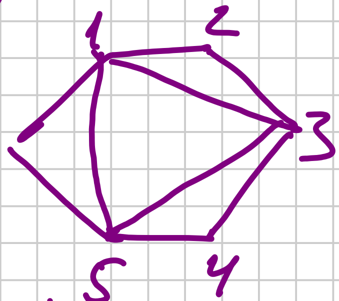
Tout amas etendu a $(k-1)(p-k-1)$ variable d'amas + p variables coeffs.

Par consequence Tout amas etendu de taille

$$(k-1)(p-k-1)+p = k(p-k)+1$$

donne le test de positivité.

E.g. $Gr_{2,6}$



Si toute coordonnées de Plücker est positive

$\{p_{13}, p_{35}, p_{15}, p_{12}, p_{23}, p_{34}, \dots p_{16}\}$

soient positives alors
<u>toute</u> variable de Plücker
est positive.

C'est une conséquence directe
de la forme des relations
d'échange:

e.g. $$p_{36} = \frac{p_{13}p_{56} + p_{16}p_{35}}{p_{15}}$$

Test de positivité!

<u>En général</u>:

Si l'espace a un anneau de coord.
avec la str-re d'alg. amasée
$\Rightarrow$ cet espace a une notion
naturelle de "partie
totalement positive"

Les amas étendu donne
les tests de positivité pour
déterminer si l'élément est
dans la partie totalm. positive
ou pas.