Wall crossing dans la théorie de la catégorie $\mathcal{O}$ de Бернштейн-Гельфанд-Гельфанд. (quelque chose comme ça)

Les 13 et 27 Février 2014

Table

1 Catégorie $\mathcal{O}$

Ici, je fait des rappels sur la catégoie $\mathcal{O}$ ou la catégorie de БГГ. Voir, e.g.,[MP] ou [K].

1.1 Définition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan, Δ et W le système de racines et le groupe de Weyl par rapport à $\mathfrak{h}$. Fixons une base $\Pi \subset \Delta$ d'où le sous-ensemble des racines positives Δ_+. Pour $\alpha \in \Delta$, notons par $\mathfrak{g}_\alpha$ le sous-espace radiciel avec la racine α. Posons $\mathfrak{n}_\pm := \bigoplus_{\pm\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$. On a une décomposition triangulaire :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-.$$

Définition 1.1. *La catégorie $\mathcal{O}$ (de* Бернштейн-Гельфанд-Гельфанд*) est la sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules dont un objet M est*

i) *$\mathfrak{h}$-diagonalisable, i.e., $M = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} M_\lambda$ où $M_\lambda = \{m \in M | h.m = \lambda(h)m \ \forall\, h\in\mathfrak{h}\}$. Posons $\mathcal{P}(M) := \{\lambda\in\mathfrak{h}^* | M_\lambda \neq \{0\}\}$.*

ii) *Pour $\lambda\in\mathcal{P}(M)$, $\dim M_\lambda < \infty$.*

iii) *Il existe un nombre fini d'éléments $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathfrak{h}^*$ tels que $\mathcal{P}(M) \subset \bigcup_{i=1}^r D(\lambda_i)$ où $D(\lambda) := \lambda - \mathbb{N}\Pi$.*

Il est claire que la catégorie $\mathcal{O}$ est une catégorie abélienne.

Voici deux type d'exemples : soit $\lambda\in\mathfrak{h}^*$. On définit la structure de $\mathfrak{b}$-module sur $\mathbb{C}_\lambda := \mathbb{C}v_\lambda$ par

$$h.v_\lambda := \lambda(h)v_\lambda \quad h\in\mathfrak{h}, \qquad \mathfrak{n}_+.v_\lambda := \{0\},$$

et on pose $M(\lambda) := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}_+}^{\mathfrak{g}}\mathbb{C}_\lambda := U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{b})}\mathbb{C}_\lambda$. Le $\mathfrak{g}$-module $M(\lambda)$ s'appelle le **module de Verma de plus haut poids** λ. Il existe le maximal sous-module propre de $M(\lambda)$ d'où le quotient simple $L(\lambda)$ est unique.

Exemple 1.1. *Considérons le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}e\oplus\mathbb{C}h\oplus\mathbb{C}f$ avec les relations $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$, $[e,f] = h$. On pose $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$, $\mathfrak{n}_+ = \mathbb{C}e$, $\mathfrak{n}_- = \mathbb{C}f$ et fixe $\alpha\in\mathfrak{h}^*$ tel que $\alpha(h) = 2$. Pour $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, on introduire la structure de $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$-module sur $\mathbb{C}_\lambda := \mathbb{C}v_\lambda$ par*

$$h.v_\lambda = \lambda(h)v_\lambda, \qquad e.v_\lambda = 0,$$

et on pose $M(\lambda) = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}\mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C}[f].(1\otimes v_\lambda)$. Pour $i\in\mathbb{N}$, on pose $u_i := \frac{1}{i!}f^i.(1\otimes v_\lambda)$. Alors,

1. *$\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ forme une base de $M(\lambda)$, et*

2. *l'action de $\mathfrak{sl}_2$ sont donnée par*

$$\begin{aligned} f.u_i &= (i+1)u_{i+1}, \\ h.u_i &= (\lambda(h)-2i)u_i, \\ e.u_i &= (\lambda(h)-i+1)u_{i-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que

1. *$M(\lambda)$ est réductible si et seulement si $\lambda(h) \in \mathbb{N}$, et*
2. *Si $\lambda(h) \in \mathbb{N}$, on a $L(\lambda) \cong M(\lambda)/U(\mathfrak{n}_-)u_{\lambda(h)+1}$.*

1.2 Décomposition de modules dans la catégorie $\mathcal{O}$

Notons par $(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire sur $\mathfrak{h}^*$ induite par la forme de Killing. Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on pose

$$\begin{aligned} &\Delta^\lambda := \{\alpha \in \Delta | 2\frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}\}, \\ &W^\lambda := \langle r_\alpha | \alpha \in \Delta_\lambda \rangle. \end{aligned}$$

Remarque 1.1. *Posons*

$$\Delta_+^\lambda = \Delta^\lambda \cap \Delta_+, \qquad \Pi^\lambda := \Delta_+^\lambda \setminus (\Delta_+^\lambda + \Delta_+^\lambda)$$

et $S^\lambda = \{r_\alpha | \alpha \in \Pi^\lambda\}$, on pourra montrer que le paire (W^λ, S^λ) est un système de Coxeter.

Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathfrak{h}^*$ définie par

$$\lambda \sim \mu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu \in W^\lambda \circ \lambda,$$

où $\circ$ est l'action translatée de W par $-\rho$, i.e., $w \circ \lambda := w(\lambda+\rho) - \rho$. D'ici, $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$.

Remarque 1.2. *En effet, on sait que $\lambda \sim \mu$ si et seulement si*
$[M(\lambda) : L(\mu)] > 0$ ou $[M(\mu) : L(\lambda)] > 0$.

Soit $\tilde{\lambda} \in \mathfrak{h}^*/\sim$ et soit $\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}$ consitutée par des $\mathfrak{g}$-modules M avec la propriété suivante :

$$[M : L(\mu)] > 0 \text{ implique } \mu \in \tilde{\lambda}.$$

Alors, le théorème suivant est un clé important :

Théorème 1.1. *On a $\mathcal{O} = \bigoplus_{\tilde{\lambda} \in \mathfrak{h}^*/\sim} \mathcal{O}_{\tilde{\lambda}}$, i.e., pour tout $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$, il existe des objets $M_{\tilde{\lambda}} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}})$ tels que $M = \bigoplus_{\tilde{\lambda}} M_{\tilde{\lambda}}$.*

Pour la preuve, il faut montrer

1. pour tout $M \in \mathrm{Ob}(M)$, il existe une suite de sous-modules
$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M,$$
telle que $M_i/M_{i-1} \cong L(\lambda_i)$ avec $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$, et

2. pour $\lambda \not\sim \mu$, $\mathrm{Ext}^1(L(\lambda), L(\mu)) = 0$.

Pour le détail, voir [MP]. Notons le fonceur $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_{\tilde{\lambda}}$ qui fait associer $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ à $M_{\tilde{\lambda}} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}})$ dans le théorème ci-dessus par $\pi_{\tilde{\lambda}}$.

2 Foncteur de translation

Ici, j'explique fonceurs de translation introduit et étudié par C. Jantzen [J].

2.1 Définition et propriétés simples

Soit $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ tel que $\mu - \lambda \in P$, le réseau de poids. Alors, il existe un unique poids dominant $\Lambda \in W(\mu - \lambda)$. En particulier, on a $\Delta^\lambda = \Delta^\mu$ et $W^\mu = W^\lambda$.

Définition 2.1. *Le foncteur $T^\mu_\lambda : \mathcal{O}_{\tilde{\lambda}} \to \mathcal{O}_{\tilde{\mu}}; M \longmapsto \pi_{\tilde{\mu}}(M \otimes L(\Lambda))$ s'appelle un foncteur de translation.*

Un objet typique de $\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}}$ est $M(w \circ \lambda)$ avec $w \in W^\lambda$. Étudions, donc $T^\mu_\lambda(M(w \circ \lambda))$!

Exemple 2.1. *Considérons le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. On reprend les notations d'Exemple 1.1. Soit $V = \mathbb{C}w_+ \oplus \mathbb{C}w_-$ la représentation naturelle :*
$$h.w_\pm = \pm w_\pm, \qquad \begin{cases} e.w_+ = 0, \\ f.w_+ = w_-, \end{cases} \qquad \begin{cases} e.w_- = w_+, \\ f.w_- = 0. \end{cases}$$
On regarde $M(\lambda) \otimes V$. On a
$$M(\lambda) \otimes V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (M(\lambda) \otimes V)_{\lambda + (\frac{1}{2} - n)\alpha},$$
$$(M(\lambda) \otimes V)_{\lambda + (\frac{1}{2} - n)\alpha} = \begin{cases} \mathbb{C}u_0 \otimes w_+, & n = 0, \\ \mathbb{C}u_n \otimes w_+ \oplus \mathbb{C}u_{n-1} \otimes w_-, & n > 0. \end{cases}$$

On pourra montrer que $U(\mathfrak{g}).(u_0 \otimes w_+) \cong M(\lambda + \frac{1}{2}\alpha)$*. En effet, on a*

$$U(\mathfrak{g}).(u_0 \otimes w_+) = \mathbb{C}u_0 \otimes w_+ \oplus \bigoplus_{n>0} \mathbb{C}(u_n \otimes w_+ + u_{n-1} \otimes w_-).$$

Par calcul, on a $((M(\lambda) \otimes V)_{\lambda - \frac{1}{2}\alpha})^{\mathfrak{n}_+} = \mathbb{C}(u_1 \otimes w_+ - \lambda(h) u_0 \otimes w_-)$ *et*

$$U(\mathfrak{g}).(u_1 \otimes w_+ - \lambda(h)u_0 \otimes w_-) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}((n+1)u_{n+1} \otimes w_+ - (\lambda(h) - n)u_n \otimes w_-).$$

On en déduit que

1. *si* $\lambda(h) \neq -1$, $M(\lambda) \otimes V \cong M(\lambda + \frac{1}{2}\alpha) \oplus M(\lambda - \frac{1}{2}\alpha)$, *et*

2. *si* $\lambda(h) = -1$, *on a* $M(0) \hookrightarrow M(-\frac{1}{2}\alpha) \otimes V \twoheadrightarrow M(-\alpha)$.

Voilà. Ca serait mieux d'avoir une idée, et voici une astuce.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Hopf sur un corps $\mathbb{K}$ avec son coproduit Δ, antipode a et counit ε, et soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ une sous-algèbre de Hopf.

Proposition 2.1 ('Tensor Identity')**.** *Soit M un $\mathcal{B}$-module et N un $\mathcal{A}$-module. Alors, il y a un isomorphisme*

$$(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} M) \otimes_{\mathbb{K}} N \cong \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (M \otimes_{\mathbb{K}} N),$$

où N dans le côté droit est regardé comme $\mathcal{B}$-module par restriction.

Notons que les applications linéaires

$$\phi : \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (M \otimes N) \to (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} M) \otimes_{\mathbb{K}} N \,;\, x \otimes (m \otimes n) \longmapsto (x_{(1)}.m \otimes x_{(2)}.n),$$
$$\psi : (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} M) \otimes_{\mathbb{K}} N \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} (M \otimes N) \,;\, (x \otimes m) \otimes n \longmapsto x_{(1)} \otimes (m \otimes a(x_{(2)}).n)$$

sont de morphismes de $\mathcal{A}$-modules et on pourra montrer que $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ et $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ (exercise). □

Un corollaire simple de cette proposition est

Corollaire 2.2. *Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $\Lambda \in P^+$, i.e., Λ est un poids dominant et entier. Alors, Le $\mathfrak{g}$-module $M(\lambda) \otimes L(\Lambda)$ une suite croissante finie de sous-modules*

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M(\lambda) \otimes L(\Lambda),$$

telle que $M_i/M_{i-1} \cong M(\lambda + \theta_i)$ avec un $\theta_i \in \mathcal{P}(L(\Lambda))$, l'ensemble des poids de $L(\Lambda)$.

Pour la preuve, il suffit de voir que $M(\lambda) \otimes L(\Lambda) \cong \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}_\lambda \otimes L(\Lambda))$ d'après Proposition 2.1. En effet, comme $\mathfrak{b}$ est une sous-algèrre rśoluble et le $\mathfrak{b}$-module $\mathbb{C}_\lambda \otimes L(\Lambda)$ est de dimension finie, il existe un drapeau complet $\mathfrak{b}$-stable

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = \mathbb{C}_\lambda \otimes L(\Lambda),$$

d'après un Théorème de Lie. Posons $M_i := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V_i$, on obtient une suite que l'on cherche. □

On va montrer

Proposition 2.3. *Supposons qu'il existe une chambre de Weyl associée au système de raines Δ^λ telle que $\lambda + \rho \in C$ et que $\mu + \rho \in \overline{C}$. Alors, pour tout $w \in W^\lambda$, on a*

$$T_\lambda^\mu(M(w \circ \lambda)) = M(w \circ \mu).$$

Ici, la chambre de Weyl fondamentale est définie par $\{\lambda \in \mathfrak{h}^* | (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \ (\alpha \in \Pi^\lambda)\}$.

<u>*Preuve.*</u> D'après Théorème 1.1 et Corollaire 2.2, il suffit de montrer que l'équation

$$w \circ \lambda + \theta = w' \circ \mu \qquad \theta \in \mathcal{P}(L(\Lambda)), \quad w' \in W^\lambda$$

n'admet qu'une unique solution $w' = w$. Posons $\lambda' = \lambda + \rho, \mu' = \mu + \rho$, $\theta' = w^{-1}\theta \in \mathcal{P}(L(\Lambda))$ et $v = w^{-1}w'$. L'équation ci-dessus récrit comme suit : $\lambda' + \theta' = v\mu'$. Si θ' et v satisfait cette équation, alors, on a

$$||\theta'||^2 = ||\mu'||^2 - 2(v\mu', \lambda') + ||\lambda'||^2.$$

Soit Π_C^λ une base de Δ^λ déterminée par la chambre C. Alors, il existe $\{n_\alpha\}_{\alpha \in \Pi_C^\lambda} \subset \mathbb{N}$ tel que $v\mu' = \mu' - \sum_{\alpha \in \Pi_C^\lambda} n_\alpha \alpha$, d'où

$$||\theta'||^2 = ||\mu' - \lambda'||^2 + 2 \sum_{\alpha \in \Pi_C^\lambda} n_\alpha(\alpha, \lambda') \geq ||\mu' - \lambda'||^2, \tag{1}$$

et l'égalité arrive si et seulement si $v = \mathrm{id}$. En plus, comme $\theta' \in \mathcal{P}(L(\Lambda))$, on a

$$||\theta'||^2 \leq ||\Lambda||^2 = ||\mu' - \lambda'||^2,$$

d'où $v = \mathrm{id}$, i.e., $w' = w$. □

La preuve de Proposition 2.3 montre qu'il peut être compliqué à calculer $T_\mu^\lambda(M(w \circ \mu))$ sous la même condition.. Pour un cas simple, on a

Proposition 2.4. *Supposons que*

1. *il existe une seule* $\alpha \in \Pi^\lambda$ *pour laquelle* $(\mu+\rho,\alpha)=0$*, et que*
2. $w \circ \lambda - wr_\alpha \circ \lambda \in \mathbb{N}^* \alpha$.

Alors, on a la courte suite exacte

$$0 \longrightarrow M(w\circ\lambda) \longrightarrow T_\mu^\lambda(M(w\circ\mu)) \longrightarrow M(wr_\alpha\circ\lambda) \longrightarrow 0.$$

En effet, pour un tel cas, ce qui change dans la preuve de Proposition 2.3 est la solution de l'égalité (1), cette inégalité devient égale si et seulement si $v \in \{\mathrm{id}, r_\alpha\}$. Donc, la preuve pour ce cas est un exercise simple.

2.2 Wall crossing

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ un poids dominant, i.e., $(\lambda,\alpha) \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \Delta_+^\lambda$. Pour chaque $\alpha \in \Pi^\lambda$, fixons $\lambda_\alpha \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ tel que

1. $\lambda - \lambda_\alpha \in P$,
2. $(\lambda_\alpha+\rho,\beta) \in \mathbb{N}^*$ si $\beta \in \Pi^\lambda \setminus \{\alpha\}$ et $(\lambda_\alpha+\rho,\alpha)=0$.

Définition 2.2. $\theta_\alpha := T_{\lambda_\alpha}^\lambda \circ T_\lambda^{\lambda_\alpha} : \mathcal{O}_{\tilde\lambda} \to \mathcal{O}_{\tilde\lambda}$ *s'appelle le 'wall crossing functor' associé à la racine* α*.*

D'après Propositions 2.3 et 2.4, on a la courte suite exacte :

$$0 \longrightarrow M(w\circ\lambda) \longrightarrow \theta_\alpha(M(w\circ\lambda)) \longrightarrow M(wr_\alpha\circ\lambda) \longrightarrow 0.$$

En effet, cette suite exacte n'est pas scindée.

2.3 Petits mots sur applications

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ un poids dominant, i.e., $(\lambda,\alpha) \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \Delta_+^\lambda$. Pour $\mu \in \mathfrak{h}^*$, soit $P(\mu)$ le $\mathfrak{g}$-module indécomposable projectif qui surjecte sur $L(\mu)$. Ceci est construit de façon suivante.

Pour $w \in W$, soit $w = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_k}$ une expression réduite. Alors, on pourra montrer (cf. [S]) que

$$P(w\circ\lambda) = \theta_{\alpha_k} \cdots \theta_{\alpha_1}(M(\lambda)). \tag{2}$$

Cette formule est loin d'être évidente. En fait, le module $P(\mu)$ admet une suite de sous-modules

$$\{0\} = P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_r = P(\mu),$$

dont chaque facteur P_i/P_{i-1} est isomorphe à un module de Verma, d'où on peut définir la multiplicité $[P(\mu) : M(\lambda)]$ de $M(\lambda)$ dans $P(\mu)$ par le nombre de i tels que $P_i/P_{i-1} \cong M(\lambda)$. Rappelons le théorème suivant :

Théorème 2.5 (Dualité de БГГ)**.** *On a* $[P(\mu) : M(\lambda)] = [M(\lambda) : L(\mu)]$.

Or, ce dernier est donnée par la conjecture de Kazhdan et Lusztig (maintenant un théorème de Beilinson-Bernstein et Kashiwara-Brylinski), i.e.,

$$[M(w \circ \lambda) : L(y \circ \lambda)] = P_{w_0 w, w_0 y}(1),$$

où $P_{*,*'}(q)$ est un polynôme de Kazhdan et Lusztig, c'est très compliqué à calculer $P(\mu)$.

Références

[MP] R. Moody and A. Pianzola, *Lie Algebras with Triangular decompositions*, Canad. Math. Soc. Ser. Monog. and Adv. Texts, Will-InterSc. Publ., 1995.

[J] C. Jantzen, *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, Lect. Notes in Math. **750**, 1979.

[K] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1994.

[S] W. Soergel, *Kategorie $\mathcal{O}$, Perverse Garben und Moduln über den Kovarianten zur WeylGruppe*, Jour. Amer. Math. Soc. **3**, (1990), 421–445.