Université Claude Bernard Lyon 1 — Année 2018-2019
Master 1 Mathématiques UE Géometrie et Topologie — **Dévoir Maison 1**

DM à rendre mercredi 3 avril 2019

Exercice 1

On rappelle que $D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| \leq 1\}$ et $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : ||\mathbf{x}|| = 1\}$.
Est-ce que c'est possible d'avoir une homotopie entre :

1. l'application identité : $D^n \to D^n$ où $D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| \leq 1\}$ et l'application constante : $D^n \to D^n$ à valeur zero.
2. l'inclusion naturelle : $S^1 \to D^2$ et une application constante : $S^1 \to D^2$.
3. l'inclusion naturelle : $D^2 \to \mathbb{R}^2$ et une application constante : $D^2 \to \mathbb{R}^2$.
4. l'inclusion naturelle : $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et une application constante : $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Exercice 2

1. Trouver trois applications non-homotopes relatives à deux extrémités de $[0,1]$ à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
2. Trouver une application injective de $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qui est homotope à une application constante $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Exercice 3

Dans cet exercice, on note M le ruban de Möbius, c'est-à-dire, l'espace topologique M obtenu comme quotient de $[0;1] \times [0;1]$ par la relation d'équivalence, engendrée par $(x,0) \simeq (1-x,1)$ pour tout $x \in [0;1]$. On note C le cercle central de M, c'est-à-dire, l?image par l?application quotient $pr : [0;1] \times [0;1] \to M$ du segment $1/2 \times [0;1]$, et on note ∂M le bord de M, c?est-'a-dire, l'image par l'application quotient pr de $(0 \times [0;1]) \cup (1 \times [0;1])$.

1. Montrer que le cercle central C de M est un rétracte par déformation de M.
2. Montrer que le bord ∂M de M n'est pas un rétracte de M.
3. Trouver deux applications non-homotopes de S^1 dans la bande de Möbius.

Exercice 4

Le cone CX d'un espace topologique X est l'espace quotient obtenu en écrasant le sous espace $X \times 0$ de $X \times [0,1]$. Soit $q : X \times [0,1] \to CX$ l'application quotient. On note ι_X l'application

$$\begin{array}{rccc} \iota_X : & X & \to & CX \\ & x & \mapsto & q(x,1) \end{array}$$

Soit $f : X \to Y$ une application continue.

1. Montrer que f est homotope à une application constante si et seulement s'il existe une application $F : CX \to Y$ telle que $F \circ \iota_X = f$.
2. Montrer que pour tout espace X, le cone CX est contractile.

T.S.V.P.

Exercice 5

Soit $\mathcal{A}$ une collection finie de copies de l'intervalle $[0, 1]$.

On appelle graphe fini un espace topologique Γ obtenu comme quotient de la réunion disjointe des intervalles de A en identifiant certaines extrémités. On appelle *arète* de Γ chaque élément de la collection A. Toute arête à deux extrémités dont les images par la projection canonique peuvent être confondues dans Γ. Les éléments de l'ensemble $S \subset \Gamma$ formé par les images des extrémités des intervalles de A sont appelés les *sommets* de Γ.

1. Soit Γ un graphe fini, et soit a une arête de Γ. On suppose que les images des extrémités de a sont distinctes dans Γ. Soit Γ' l'espace quotient obtenu à partir de Γ en identifiant tous les points dans l'image de a. Montrer que Γ et Γ' sont homotopiquement équivalents.

2. Montrer que tout graphe fini connexe contient un sous-ensemble contractile M tel que tout sommet de Γ appartienne à M. Soit Γ un graphe fini connexe. La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Gamma)$ de Γ est l'entier $\chi(\Gamma) = \#S - \#A$, où $\#S$ est le nombre de sommets de Γ et $\#A$ est le nombre d'arêtes de Γ. Montrer que Γ est homotopiquement équivalent au bouquet de $1 - \chi(\Gamma)$ cercles.

Exercice 6

On considère l'espace topologique T obtenu comme quotient de $[-1; 1] \times [-1; 1]$ par la relation d'équivalence engendrée par $(x, -1) \simeq (x, 1)$ et $(-1, x) \simeq (1, x)$ pour tout $x \in [-1; 1]$. On considère une application $\gamma : [0, 1] \to T$ qui envoie $t \mapsto \frac{1}{2}e^{2\pi it}$. On remarque que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset T$ partage T en deux parties connexes par arcs. Calculer leur groupes fondamentaux respectifs.