Université Claude Bernard Lyon 1
Master 1 Mathématiques UE Géometrie et Topologie **Fiche Homologie-1**

Complexes de chaînes

Rappel.
Un complexe de chaînes, (C_*, d), est une suite de R-modules et de morphismes de R-modules de la forme

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

avec $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \ \forall n \geq 1$. Ici R est un anneau commutatif et R-module C_n est un groupe commutatif avec une lois $R \times M \to M$.
La n-ème homologie du complexe de chaînes (C_*, ∂) est le groupe

$$H_n(C_*, \partial) = \mathrm{Ker}\partial_n / \mathrm{Im}\partial_{n+1}.$$

On appele les éléments de noyau $\mathrm{Ker}\partial_n$ des n-cycles et les éléments de $\mathrm{Im}\partial_{n+1}$ - des bords.
On dit que la suite est exacte si tout groupe d'homologie est zero.

Exercice 1.
On considère une suite de $\mathbb{Z}$-modules suivante :

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Ici $C_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\ C_0 = \mathbb{Z}$ et tout autre $\mathbb{Z}$-module est nul.
Cette suite est un complexe de chaînes dès qu'on définie la différentielle. On considère trois complexes avec ∂

1. $\partial(m, n) = 5m$
2. $\partial(m, n) = 5m - 5n$
3. $\partial(m, n) = 2m + 6n$
4. $\partial(m, n) = 2m + 3n$.

où $(m, n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Trouver les groupes de cycles et les groupes de bords en toute dimension de ces complexes de chaînes. Calculer les groupes d'homologie pour chaque cas de la différentielle ∂.

Exercice 2.
Calculer l'homologie du complexe $D_*(m, k)$, où les groupes de chaînes sont donnés par

$$D_n(m,k) = \begin{cases} 0 & n \neq m, m-1 \\ \mathbb{Z} & n = m, m-1. \end{cases} \quad : \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_m} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

et le bord ∂_m est une multiplication par un entier $k \neq 0$.

Exercice 3.
Soit $p \geq 0$. Soit C_* le complexe de chaînes défini par
— $C_n = \mathbb{Z}$ si $0 \leq n \leq p$, et $C_n = 0$ pour $n > p$,
— le bord $d : C_k \longrightarrow C_{k-1}$ est la multiplication par 2, si k est pair, et l'application nulle, si k est impair. Déterminer $H_k(C_*, d)$.

Exercice 4. On considère un complexe de chaînes avec

$$0 \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

où $C_3 = \mathbb{Z},\ C_2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\ \ C_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\ C_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, et

$$\partial_3 = 0,\ \partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer les bords et les cycles et expliquer le resultat pour les groupes d'homologie de ce complexe :

$$H_0 = \mathbb{Z},\ H_1 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\ H_2 = 0,\ H_3 = \mathbb{Z}$$

(Notation : $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$)

Exercice 5. Déterminer s'il existe une suite exacte courte $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0$

Exercice 6. Si $F : A_* \to B_*$ est un morphisme de complexes de chaînes (c'est à dire $f \circ \partial_A = \partial_B \circ f$), vérifier que $Kerf, \mathrm{Im}f$ et $B/\mathrm{Im}f$ sont des complexes de chaînes.

Exercice 7. Opérations sur les suites exactes

1. Si

$$M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} M_3 \xrightarrow{\phi_1} M_4$$

   est une suite exacte de R-modules. Montrer que les deux suites

$$M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} N \longrightarrow 0 \text{ et } 0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M_3 \xrightarrow{\phi_3} M_4$$

   sont aussi exactes où $N = \mathrm{Im}\phi_2 = \mathrm{Ker}\phi_3$, et l'application i est une inclusion de $\mathrm{Ker}\Phi$ dans M_3.

2. Inversement, si

$$M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} N \longrightarrow 0 \text{ et } 0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M_3 \xrightarrow{\phi_3} M_4$$

   sont deux suites exactes avec N un sous-module de M_3 et i une inclusion, la suite

$$M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} M_3 \xrightarrow{\phi_1} M_4$$

   est aussi exacte.

Exercice 8. Suite exacte d'un homomorphisme

Soit $\phi : M \to N$ un homomorphism ede R-modules. Montrer que

1. $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\phi \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\phi} \mathrm{Im}\phi \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte.

2. $0 \longrightarrow \mathrm{Im}\phi \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\rho} N/\mathrm{Im}\phi \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte.

3. $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\phi \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\rho} N/\mathrm{Im}\phi \longrightarrow 0$ est une suite exacte.