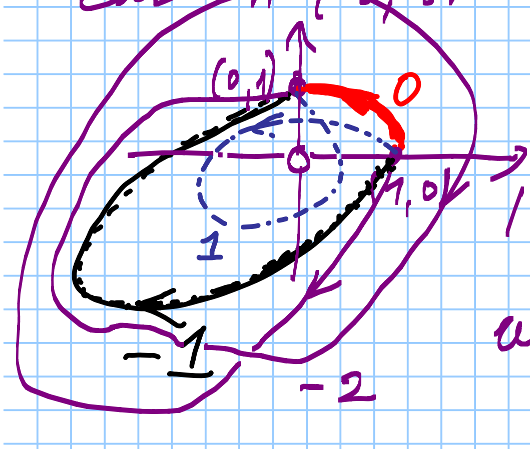
Corrigé GéoTopo CC1 27.02.2018

Exercice 1. Chemins homotopes.

On considère les chemins dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de point $(1,0)$ vers le point $(0,1)$. Donner une définition des chemins homotopes et décrire les classes d'homotopie des chemins.

Deux chemins $\alpha : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $I = [0,1]$
$$t \mapsto \alpha(t)$$
et $\beta : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
$$t \mapsto \beta(t)$$
sont homotopes s'il existe une application continue $H : I \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
$$(t,s) \mapsto H(t,s)$$
t.q. $H(t,0) = \alpha(t)$ et $H(t,1) = \beta(t)$

La classe d'homotopie de chemin est donné par le nombre de tours autours de $(0,0)$. On ne peut pas homotoper un chemin à n tours au chemin à m tours si $m \neq n$ car $H(t,s)$ doit être continue.



4 chemins non-homotopes avec $0, 1, -1$ et -2 tours. Il y alors $\mathbb{Z}$ classes d'homotopie

une autre façon de le voir :

soit $\alpha_0 : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\alpha_0(t) = t \cdot (1,0) + (1-t)(0,1)$, $t \in I$.

alors pour tout chemin $\alpha : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\alpha(0) = (1,0)$ et $\alpha(1) = (0,1)$ on a la concaténation

$$\alpha_0 \circ \alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & ; \ t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ \alpha_0(2t-1) & ; \ t \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

qui forme un lacet de base $x_0 = (1,0)$. C'est un isomorphisme des chemins qu'on considère vers les lacets de base x_0. On utilise le fait que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = \mathbb{Z}$ pour conclure.

Exercice 2. Homéomorphisme et les groupes fondamentaux.

1. Soit X, Y deux espaces topologiques et $\phi : X \to Y$ un homéomorphisme. Montrer que ϕ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.
2. On considère un demi-plan $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; y \geq 0\}$. Montrer que il n'existe pas de homéomorphisme entre H et $\mathbb{R}^2$.

1. Un homéomorphisme induit un isomorphisme des gp. fondamentaux. En effet, soit $\alpha : [0,1] \to (X, x_0)$ un lacet de base x_0 $(\alpha(0) = \alpha(1) = x_0)$

alors si $\varphi : X \to Y$ est un homéom. (une application bijective continue d'inverse φ^{-1} continue continue), il y a une application sur les chemins : $\varphi_*(\alpha) : [0,1] \to (Y, \varphi(x_0))$ donnée par $(\varphi_*(\alpha))(t) = \varphi(\alpha(t))$. En particulier, sur les chemins dans Y on a $\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = (\varphi \circ \varphi^{-1})_* = id_* = id$

et de même dans X : $\varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = (id_X)_*$

donc φ_* et φ_*^{-1} sont des bijections et $\varphi_*(\alpha \circ \beta)(t) = \varphi_*(\alpha) \circ \varphi_*(\beta)(t)$ - morphisme de gp. de lacets $\Rightarrow$ isomorphisme de gp fondamentaux

2. Supposons qu'il existe un homéomorphisme entre H ~~et~~ $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}^2$ cet homéomorphisme. On considère une restriction de φ sur $H \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(0,0)\}$

$\pi_1(H \setminus \{(0,0)\})$ est trivial, tandis que π_1 de $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est $\mathbb{Z}$.

Contradiction avec part 1.

Exercice 3. Rétract.

Soit x_0 un point de S^1. Montrer que le $S^1 \times \{x_0\}$ est un rétract de $S^1 \times S^1$ mais que ce n'est pas un rétract par déformation.

On rétract $S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times \{x_0\}$

par $r : (s,t) \longmapsto (s, x_0)$

On a l'injection canonique

$i : S^1 \times \{x_0\} \hookrightarrow S^1 \times S^1$

Mais comme une rétraction par déformation est une équivalence d'homotopie (i.e si $A \xhookrightarrow{i} X$ et $X \xrightarrow{r} A$ est un rétract $r \circ i|_A = id_A$ et $i \circ r$ doit être homotope à l'identité) par conséquant les gp. fondamentaux doivent être égaux il n'y a pas de retracte $S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times \{x_0\}$ car

les gp. fondamentaux ne sont pas le mêmes : $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ - produit libre de $\mathbb{Z}$

et $\pi_1(S^1 \times \{x_0\}) = \mathbb{Z}$

Exercice 4. Groupe fondamental.

1. Quel est le groupe fondamental du plan privé d'un point ? Justifier en utilisant un réctract par déformation sur le cercle.
2. Quel est le groupe fondamental du plan privé de trois points ?

1. On utilise le faite que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Ainsi un rétract par déformation $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow S^1$ donne $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

(déja utilisé dans l'exo 2

Une application rétraction est donnée par exemple par $r : (x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Où on considère le cercle comme

$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 1\}$

et $i : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ injection canonique

$r_0 \circ i = id|_{S^1} \Rightarrow S^1$ est un rétract de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

c'est un rétract par déformation car

$i \circ r$ est homotope à l'identité

par l'homotopie – une applic. continue

$$H : I \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$(t,(x,y)) \mapsto (tx,ty) + \frac{(1-t)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$$

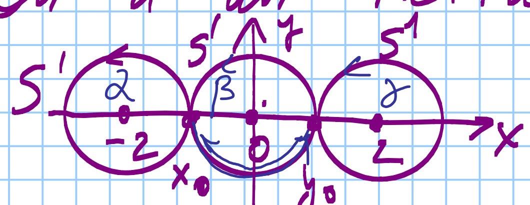
t.q. $H(0,(x,y)) = \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = i \circ r(x)$

et $H(1,(x,y)) = (x,y) = id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}(x,y)$

Par conséquent on a $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = \mathbb{Z}$

2. On considère $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (2,0), (-2,0)\}$

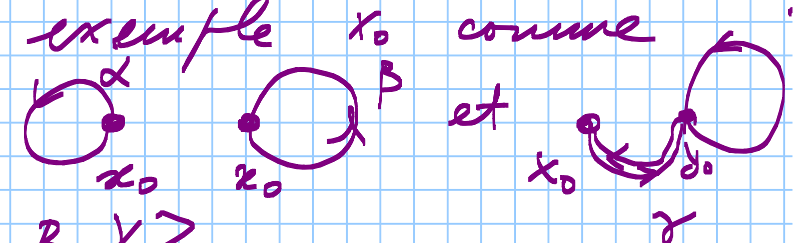
On a un rétract sur 3 cercles :



$S^1 \times_{\{x_0\}} S^1 \times_{\{y_0\}} S^1$

~~Dont~~ le gp fondamental est $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ – les lacets sont engendrés par 3 générateurs indépendents :

si on choisi par exemple x_0 comme point de base on a



trois lacets dans "l'alphabet" $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$

Exercice 5. Droites dans l'espace.

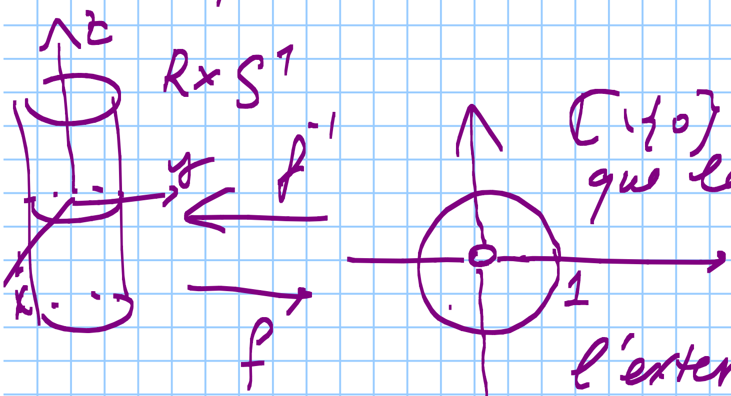
Le but de cet exercice est le calcul du groupe fondamental de $\mathbb{R}^3$ privé de deux droites sécantes. Notons cet espace X :

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \ (\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y = z = 0\}).$$

Indication : Il est utile d'utiliser les résultats de l'exercice précédent.

1. On consider un cylindre $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times S^1$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On peut paramétrer le cylindre par les coordonnées hauteur et angle. Montrer que l'application $(z, \theta) \to e^z e^{i\theta}$ définit un homéomorphisme entre le cylindre $\mathcal{C}$ et les nombres complexes privé de l'origine $\mathbb{C} \setminus \{(0\}$ que l'on idéntifie avec le plan réel privé de l'origine : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que le cyclindre $\mathcal{C}$ est un retracte par déformation de $Y = \mathbb{R}^3 \setminus \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y = 0\}$
3. Quel est l'image de $X \subset Y$ par l'application de rétraction de Y sur $\mathcal{C}$?
4. Quel est le groupe fondamental de X ?

1. $f : \mathbb{R} \times S^1 \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ continue et bijective
$(z, \theta) \longmapsto e^z e^{i\theta}$ avec l'inverse :
$\theta \in [0, 2\pi]$ $f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \times S^1$
$z = |z| e^{it} \longmapsto (\ln|z|, t)$



$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ on remarque en particulier que la partie négative du cylindre corresponde au disque et la partie positive à l'exterieur du disque.

2. $x = y = 0$ défini la droite - l'axe O_z
$\mathbb{R}^3 \setminus O_z$ se rétracte par déformation sur le cylindre $i : C \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus O_z$ - injection canonique
et $r : \mathbb{R}^3 \setminus O_z \longrightarrow C$
$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right)$
On peut aussi le voir comme cela : S^1 est un rétract par deformation de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ alors $\mathbb{R} \times S^1$ est un rétract par déformation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
$= \mathbb{R}^3 \setminus \ \mathbb{R} \times \{(0,0)\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\} = Y$

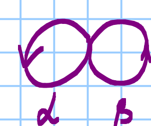
3. L'image de X dans le cylindre est $C \setminus \{(1,0,0), (-1,0,0)\}$ où on enleve les pts d'insertection de C avec la droit O_x.

Comme $X = Y \setminus \{y = z = 0\}$ on a le resultat

4. Finalement par la partie 1 $C \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, si on enlève deux pts du cylindre le resultat est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ avec 3 points enlevés et le resultat est $\pi_1(X) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \text{trois pts}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

Exercice 6. Produit libre.

1. Montrer que si $G * H$ est abélien alors G ou H est le groupe trivial (qui n'a qu'un élément).
2. Soit $A = \{1, a\}$ et $B = \{1, b\}$ des groupes à deux éléments (c'est à dire $a^2 = 1$ et $b^2 = 1$).
   (a) Décrire tous les éléments de $A * B$.
   (b) Décrire les inverses des éléments de $A * B$.
   (c) Trouver un élément d'ordre infini.

1. $G * H$ est le produit libre. Par définition les éléments sont des mots en alphabet des mots G et H. En particulier si $g \in G$ et $h \in H$ gh et hg sont deux éléments differents dans $G * H$ (comparer avec deux lacets 

$\alpha\beta \neq \beta\alpha$)

$gh = hg$ dans $G * H$ est possible ssi $g = e$ ou $h = e$.

2. $A = \{1, a\}$ et $B = \{1, b\}$ $a^2 = 1$, $b^2 = 1$

(a) $A * B = \{ a, ab, aba, abab, \ldots$
$b, ba, bab, baba, babab \ldots \}$

(b) $aa = 1$, $bb = 1 \Rightarrow$

$ab \ldots abab$ a pour inverse le mot lu à l'inverse $\leftarrow$

$baba \ldots ba$

(c) Un element d'ordre infini:

ab (ou ba), car $\underbrace{ababab \ldots ab}_{n \text{ fini}} \neq e$