Université Claude Bernard Lyon 1 — Année 2017-2018
Master 1 Mathématiques UE Géometrie et Topologie — **Mardi, 27 février 2018**

# *Contrôle continu 1.*

Durée 1 h 30

**Exercice 1. Chemins homotopes.**
On considère les chemins dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de point $(1,0)$ vers le point $(0,1)$. Donner une définition des chemins homotopes et décrire les classes d'homotopie des chemins.

**Exercice 2. Homéomorphisme et les groupes fondamentaux.**

1. Soit $X, Y$ deux espaces topologiques et $\phi : X \to Y$ un homéomorphisme. Montrer que $\phi$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.
2. On considère un demi-plan $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y \geq 0\}$. Montrer que il n'existe pas de homéomorphisme entre $H$ et $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 3. Rétract.**
Soit $x_0$ un point de $S^1$. Montrer que le $S^1 \times \{x_0\}$ est un rétract de $S^1 \times S^1$ mais que ce n'est pas un rétract par déformation.

**Exercice 4. Groupe fondamental.**

1. Quel est le groupe fondamental du plan privé d'un point ? Justifier en utilisant un réctract par déformation sur le cercle.
2. Quel est le groupe fondamental du plan privé de trois points ?

**Exercice 5. Droites dans l'espace.**
Le but de cet exercice est le calcul du groupe fondamental de $\mathbb{R}^3$ privé de deux droites sécantes. Notons cet espace $X$ :

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \ \left(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y = z = 0\}\right).$$

*Indication :* Il est utile d'utiliser les résultats de l'exercice précédent.

1. On consider un cylindre $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times S^1$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On peut paramétrer le cylindre par les coordonnées hauteur et angle. Montrer que l'application $(z, \theta) \to e^z + e^{i\theta}$ définit un homéomorphisme entre le cylindre $\mathcal{C}$ et les nombres complexes privé de l'origine $\mathbb{C} \setminus \{(0\}$ que l'on idéntifie avec le plan réel privé de l'origine : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que le cyclindre $\mathcal{C}$ est un retracte par déformation de $Y = \mathbb{R}^3 \setminus \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y = 0\}$
3. Quel est l'image de $X \subset Y$ par l'application de rétraction de $Y$ sur $\mathcal{C}$ ?
4. Quel est le groupe fondamental de $X$ ?

**Exercice 6. Produit libre.**

1. Montrer que si $G * H$ est abélien alors $G$ ou $H$ est le groupe trivial (qui n'a qu'un élément).
2. Soit $A = \{1, a\}$ et $B = \{1, b\}$ des groupes à deux éléments (c'est à dire $a^2 = 1$ et $b^2 = 1$).
   (a) Décrire tous les éléments de $A * B$.
   (b) Décrire les inverses des éléments de $A * B$.
   (c) Trouver un élément d'ordre infini.