Géométrie-Topologie 23. 03. 2020

The basis of all human culture is language, and mathematics is a special kind of linguistic activity.

Yu. Manin

Mathematics as profession and vocation,
in Mathematics: Frontiers and Perspectives,
(V. Arnold et al, ed), AMS, 200, p. 154

Chapitre 1

Source : Matveev Lect. on alg. topology

Catégories et Foncteurs

$\mathcal{C}$ - une catégorie

$Obj(\mathcal{C})$ - objets

$Mor(\mathcal{C})$ - morphismes $A, B \in Obj(\mathcal{C})$

$[A,B]$ de A vers B.

Composition des morphismes

$f \in [A,B]$ $g \in [B,C]$

$$[A,B] \times [B,C] \longrightarrow [A,C]$$

$$(f,g) \longmapsto gf$$

Déf Obj + Mor + Composition forment une catégorie si

- la composition est associative

$f \in [A,B]$, $g \in [B,C]$, $h \in [C,D]$

$$(hg)\cdot f = h(gf)$$

- Pour tout $B \in Obj$

$\exists$ un morphisme $Id_B \in [B,B]$

t.q. $\forall$ $f \in [A,B]$, $g \in [B,C]$

on a $Id_B \circ f = f$ et $g \circ Id_B = g$

Exemples

1. $Obj(C_1)$ = Ensembles
   $Mor(C_1)$ = applications
2. $Obj(C_2)$ = groupes
   $Mor(C_2)$ = homomorphismes
3. $Obj(C_3)$ = groupes abeliens
   $Mor(C_3)$ = homomorphismes
4. $Obj(C_4)$ = espaces topologiques
   $Mor(C_4)$ = applications continues
5. $Obj(C_5)$ = espaces topologiques
   $Mor(C_5)$ = classes d'homotopie.
   $f \in [A,B]$, notation $f: A \to B$

<u>Déf</u> Soient $X, Y \in C$. On dit que X et Y <u>sont isomorphe</u> si $\exists\, f: X \to Y$ et $g: Y \to X$ t.q. $fg = Id_Y$ et $gf = Id_X$

f, g - sont appelés <u>isomorphismes</u>

<u>Exemples</u> catég. des ensembles
isomorphismes = bijections
les objets isomorphes ont la même cardinalité.

Catég. des esp. topologiques:
isomorphismes = homéomorphismes

categ. de groupes
isom. = isom. de group.

---

catég. des esp. topologiques
avec les morphismes - les applic homotopique
isomorphismes = équivalence homotopique.

Soient C_1 et C_2 deux catégories
Notons $F : \mathrm{Obj}(C_1) \to \mathrm{Obj}(C_2)$
$$X \longmapsto F(X)$$
Pour $\forall$ morphisme $f : X \to Y$ dans C_1
on associe $f_* : F(X) \to F(Y)$ dans C_2

C'est un <u>foncteur covariant</u> de C_1 vers C_2 si

- si f est un morphisme d'identité f_* l'est aussi
- si fg est bien défini alors
$$(fg)_* = f_* g_*$$

<u>Foncteur contravariant</u> $F : C_1 \to C_2$
$f : X \to Y \rightsquigarrow f^* : F(Y) \to F(X)$
- identité
- composition $(fg)^* = g^* f^*$

Exemples

Catégorie des groupes → Catégorie des ensembles

Foncteur d'oublie — foncteur covariant

Catégorie des espaces vectoriels

espace vectoriel V ⟶ L'espace des formes linéaires (= applications linéaires $\mathcal{L}(V, \mathbb{k})$), V^*

$$V \longrightarrow V^*$$

$$f : V \to W \quad \rightsquigarrow \quad f^* : W^* \longrightarrow V^*$$
$$\xi \longmapsto f^*(\xi)$$

$$\underbrace{(\underbrace{f^*(\xi)}_{W^*})}_{V^*}(\underbrace{x}_{V}) := \underbrace{\xi}_{W^*}(\underbrace{f(x)}_{W})$$

Thm 1 Soit $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ - foncteur

Supposons que X, Y de $\mathcal{C}_1$ sont isomorphes

alors $F(X)$ et $F(Y)$ le sont aussi.

Si $F(X)$ n'est pas isomorphe à $F(Y)$ alors X et Y ne sont pas isomorphe non plus!

Preuve Soit F covariant.

Soit $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ des isomorphismes entre X et Y t.q. $fg = Id_Y$ et $gf = Id_X$. alors par déf. de foncteur on a $f_* g_* = Id_{F(Y)}$ et $g_* f_* = Id_{F(X)}$ alors $F(X)$ et $F(Y)$ sont isomorphes.

applic. standard Pour m.q. X, Y deux esp. topologiques sont distincts, il suffit de trouver une catégorie avec un foncteur F de catégorie des esp. topologiques vers cette autre catégorie et comparer $F(X)$ et $F(Y)$. Si $F(X)$ n'est pas isomorphe à $F(Y)$ on conclut que X n'est pas isomorphe à Y.

Rq. Si $F(X) = F(Y)$ on ne peut pas conclure que $X = Y$

Exemple $\mathbb{Z}_4$ et $\mathbb{Z}_5$ ne sont pas isomorphes car le foncteur d'oubli dans la catégorie des ensembles donne deux ensembles non-isomorphes.

"Nice" foncteur

1. Facile à calculer
2. Facile à distinguer les objets $F(X)$ et $F(Y)$
3. Pas perdre beaucoup d'info

<u>Foncteur d'homologie</u> :

Categorie des espaces topologiques
$\longrightarrow$ Categorie des sequences des groupes abéliens.

cours GeoTopo-2

algèbre : complexes de chaînes

http://analysis-situs.math.cnrs.fr/

Intro à l'homologie :

Avant de nous embarquer dans cette aventure, fixons-nous quelques objectifs : nous voudrions définir un moyen d'associer à toute variété V et tout entier i un groupe abélien noté $H_i(V)$ (le i-ème groupe d'homologie de V) qui mesurera la « complexité topologique en dimension i » de V. Nous voulons que ces groupes d'homologie satisfassent au moins les trois propriétés suivantes :

1. Si deux variétés sont homéomorphes, ou même homotopiquement équivalentes, alors elles ont les mêmes groupes d'homologies (*naturalité*).
2. Les groupes d'homologie $H_i(\{pt\})$ d'un point (ou de $\mathbb{R}^n$) sont $\{0\}$, sauf si $i = 0$ où $H_0(\{pt\}) = \mathbb{Z}$.
3. Les groupes d'homologie d'une union disjointe de deux variétés sont la somme directe des groupes d'homologies de chaque variété.

Homotopie : l'ensemble des lacets basés en pt. donné

$\gamma : [0,1] \to X$

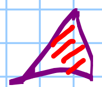
⇝ Groupe d'homotopie $\gamma_2 \circ \gamma_1$

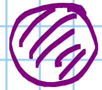
Homologie Sommes formelles de chemins de X, de points de X et d'un opérateur d qui envoie un chemin c vers la différence de ses extrémités

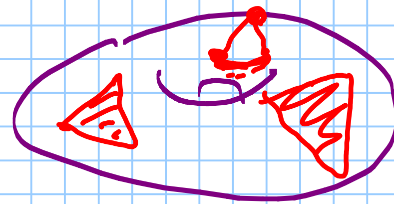
$dc = c(1) - c(0)$ $\quad c : [0,1] \to X$

$2 \cdot c_1 + 3c_2 - c_3 = A$

$A + A' = A' + A$

 $\longrightarrow X$

 $\longrightarrow X$



$H_n(X)$ – suite de groupes abeliens associé à X

(C_n, d) $\quad d : C_{n+1} \to C_n$

2.2 | Complexe de chaînes.

soit R – un anneau commutatif

M – R-module si M est un gp. commutatif muni d'une loi de multiplication $R \times M \to M$

$$a, m \mapsto a \cdot m$$

- $1 \cdot m = m \quad \forall m \in M$
- $(a+b)\cdot m = a\cdot m + b \cdot m$
- $a(m_1 + m_2) = a\cdot m_1 + a \cdot m_2$
- $(a\cdot b)\cdot m = a\cdot(b \cdot m) \quad \forall a, b \in R \quad \forall m_1, m_2 \in M.$

Si $R = \mathbb{Z}$ un R-module M est simplement un groupe commutative.

Si R – corps un R-module M est un esp. R-vectoriel

Un morphisme de R-modules est un homomorphisme de groupes compatible avec la loi externe, $f(a\cdot m) = a \cdot f(m)$

$\forall a \in R, \forall m \in M$

Déf Une suite de morphismes de R-modules,

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1}$$

est dite exacte si l'on a

$$\mathrm{Im}\, f_{k+1} = \mathrm{Ker}\, f_k$$

$$M_{k+1} \xrightarrow{f_{k+1}} M_k \xrightarrow{f_k} M_{k-1}$$

$$\mathrm{Im}(f_{k+1}) \to 0$$

En particulier, $0 \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$

exacte

$\mathrm{Im}\, g = 0 = \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow f$ est injective

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} 0$$

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, h = B \Rightarrow f$ est surjective.

Déf Une suite exacte courte est une suite exacte

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

1. f est injective
2. g est surjective
3. $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$

Exemple: 1 $\quad \forall n \geq 2$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mult}_n} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

suite exacte courte de groupes abeliens.

2. $i : M \hookrightarrow N$

$$0 \to M \xrightarrow{i} N \to N/M \to 0$$

3. $0 \to \operatorname{Ker} p \to M \xrightarrow{p} N \to 0$

p surjective

<u>Déf.</u> Un complexe de chaînes (C_*, d) est une suite de R-modules de morphismes de R-modules de la forme

$$\xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \to \dots \to C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

avec $\boxed{d_n \circ d_{n+1} = 0}$, $\forall n \geq 1$

C_n - R-modules

d_n - <u>différentielle</u>, l'application <u>bord de complexe</u>.

<u>Cycles de dég. n</u> $= \operatorname{Ker} d_n$

$$Z_n(C_*, d) = \operatorname{Ker}(d_n : C_n \to C_{n-1})$$

$$B_n(C_*, d) = \operatorname{Im}(d_{n+1} : C_{n+1} \to C_n)$$

$$d_n \circ d_{n+1} = 0 \Rightarrow B_n \subset Z_n$$

$Z_n / B_n = H_n(C_*, d)$ - n-ème

R-module d'homologie du complexe (C_*, d). Si $x \in Z_n$ alors

$[x]$ - l'image de x dans Z_n/B_n

x - representant de $[x]$

$[x]$ - la classe d'homologie de x

A (C_*, d) on associ une suite infinie de R-modules

$$H_0(C_*, d), H_1(C_*, d) \ldots H_n(C_*, d) \ldots$$

Déf Morphisme de complexes de chaînes $f : (A_*, d) \to (B_*, d')$

$$\begin{tikzcd} \arrow[r, "d_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & {} \\ \arrow[r, "d'_{n+1}"] & B_n \arrow[r, "d'_n"] & B_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] & {} \end{tikzcd}$$

+ une suite de morphismes de R-modules

$f_n : A_n \to B_n$, t.q

$$f_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ f_n \quad \forall n \geq 1$$

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ B_n \arrow[r, "d'_n"] & B_{n-1} \end{tikzcd}$$

Si $x \in A_n$ est un cycle alors $f_n(x) \in B_n$ est aussi un cycle $(d'_n f_n(x) = 0)$

Si $y \in A_n$ est un bord ($\exists z \in A_{n+1}$ t.q. $y = d_{n+1} z$)

alors $f_n(y) \in B_n$ est aussi un bord : $f_n(d_{n+1} z) = d'_{n+1} \underbrace{f_{n+1} z}_{\text{bord.}}$ - le

Alors tout morphisme de cx. de chaînes induit un morphisme de R-modules entre les groupes d'homologie.

$$H_n(f) : H_n(A_*, d) \to H_n(B_*, d')$$

$$H_n(f)([x]) = [f_n(x)]$$

On a $H_n(id) = id$

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & {} \\
\arrow[r] & B_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "g_n"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"] & {} \\
\arrow[r] & C_n \arrow[r, "d''_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Def Si f et g sont deux morphismes de cxs de chaînes

$$f, g : (A_*, d) \to (B_*, d')$$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & {} \\
\arrow[r] & B_n \arrow[r, "d'_n"] & B_{n-1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

une homotopie h entre f et g

est la donnée d'une suite de morphismes de R-modules

$h_n : A_n \to B_{n+1}$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & {} \\
& B_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & B_n \arrow[r] & B_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

$$f_n - g_n = h_{n-1}\circ d_n + d_{n+1}\circ h_n \quad \text{pour } \forall n \geq 0$$

On pose $h_{-1} = 0$

$$f - g = h\circ d + d\circ h$$

<u>Prop.</u> Si deux morphismes de cxs de chaînes $f, g : (A_*, d) \to (B_*, d)$ sont homotopes, ils induisent la même application en homologie.

<u>Démo</u>: Si $x \in A_n$ - cycle

$$f_n(x) - g_n(x) = \underbrace{d_{n+1}h_n(x)}_{\text{est un bord}} + h_{n-1}\circ \underbrace{d_n(x)}_{0}$$

D'où l'égalité des classe

d'homologie associées: $[f_n(x)] = [g_n(x)]$

Déf Une suite exacte courte de complexe de chaînes

$$0 \to A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \to 0$$

est la donnée de trois complexes de chaînes A_*, B_*, C_* et de deux morphismes de cxs de chaînes t.q. $\forall\, n \geq 0$

$$0 \to A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \to 0$$

est une suite exacte courte

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d_{n+1}"'] & B_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "d'_{n+1}"'] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n"'] & B_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Thm (Lemme du serpent) Si $0 \to A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \to 0$ est une suite exacte courte de complexes de chaînes, on lui associe une suite exacte longue en homologie

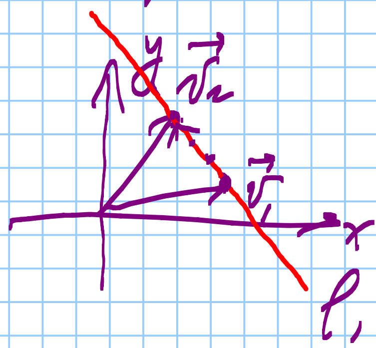
$$\to H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C) \xrightarrow{\delta}$$

$$\to H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(B) \xrightarrow{H_{n-1}(g)} H_{n-1}(C) \to$$

$$\to \cdots$$

Chapitre 3 complexe simplicial

Simplexe - généralisation d'un triangle en dim supérieure.

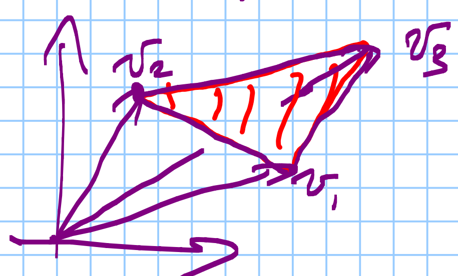


$\vec{v}_1 + \lambda(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ paramétrise la droite ℓ_1

$= (1-\lambda)\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$\lambda \in [0,1]$ on a le segment de ℓ_1 entre $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. λ - coordonnée sur ce segment

$$\begin{cases} 0 \le \lambda_i \le 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

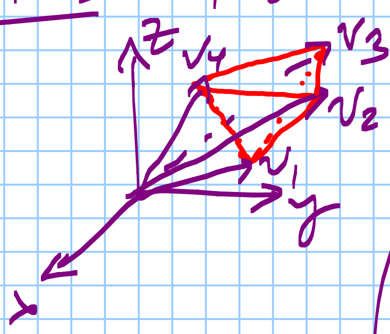


$$\hat{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3$$

$$\begin{cases} 0 \le \lambda_i \le 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

coordonnées barycentriques pour les pts de triangle

<u>dim 3</u> 4 vecteurs



tétraèdre

$$\begin{cases} \hat{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \lambda_4 \vec{v}_4 \\ 0 \le \lambda_i \le 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \end{cases}$$

3-simplexe dans $\mathbb{R}^3$

n-simplexe dans $\mathbb{R}^n$

$(n+1)$ pts $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_n$ en position générique (ne sont pas tous dans un sous-espace)

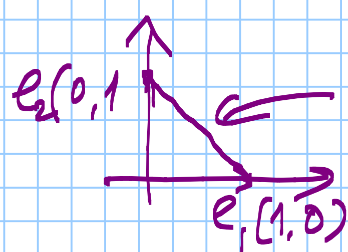
définissent Δ_n : $\lambda_0 \vec{v_0} + \dots + \lambda_n \vec{v_n}$

$$0 \leq \lambda_i \leq 1$$

$$\sum_0^n \lambda_i = 1 .$$

Forme standard

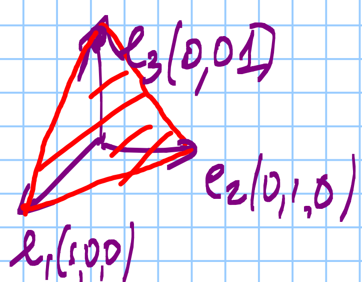
$\mathbb{R}^2$



simplexe de dim 1 Δ_1

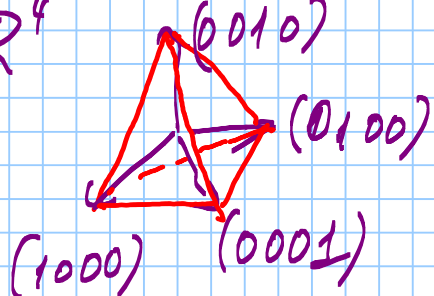
$$x_1 + x_2 = 1$$

$\mathbb{R}^3$



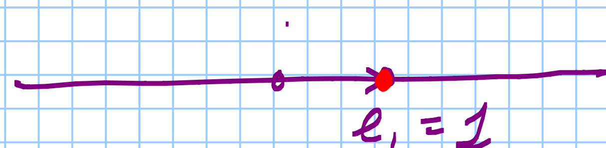
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad \Delta_2$$

$\mathbb{R}^4$



$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \qquad \Delta_3$$

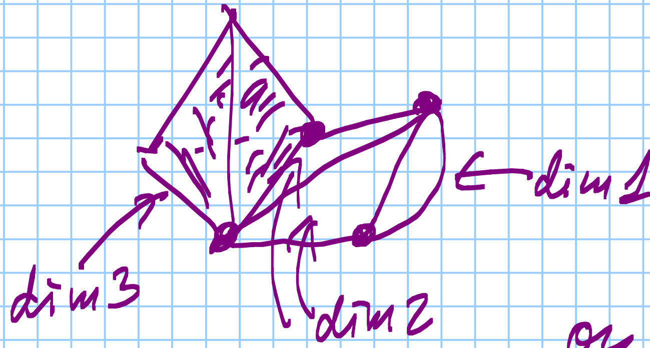
Sur $\mathbb{R}^1$



$$x_1 = 1$$

$\Delta_0 = pt.$

Complexe simpliciale — espace construit à partir des simplexes.

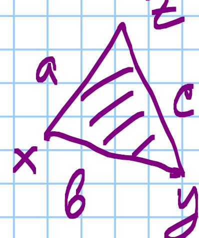


Règles :

2 simplexes sont disjoint ou bien l'intersection de deux simplexes est une face.

Face d'un simplexe S est un simplexe $P \subseteq S$ t.q. ses sommets sont aussi des sommets de S.

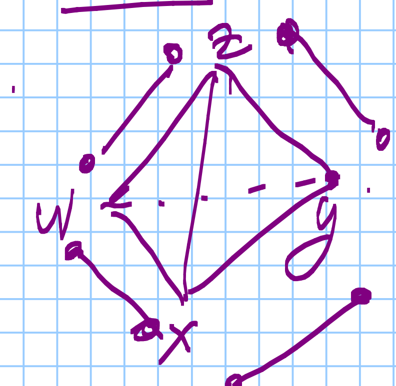
Par exemple : Faces : dim 2 : S.



$S = \Delta_2$

dim 0 — x, y, z - sommets

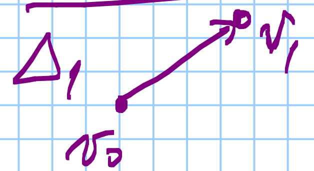
dim 1 — a, b, c.



$S = \Delta_3$ - dim 3		1
dim 0 :	x, y, z, w	4
dim 1 :	xy, xz, xw yz, zw, yw	6
dim 2 :	xyz, xyw xzw, yzw	4

Faces : sous-ensembles de sommets $\{x, y, z, w\}$

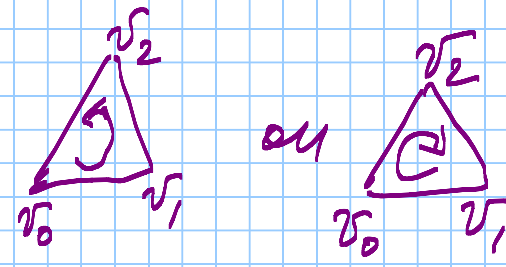
Orientation



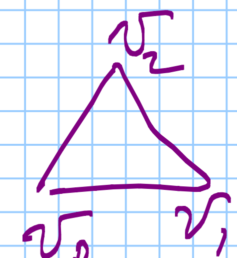
choix $(v_0\, v_1)$

ou bien $(v_1\, v_0)$

bord $\partial (v_0\, v_1) = v_1 - v_0$



S:



$(v_0\, v_1\, v_2)$ $\;\;$ $(v_0\, v_2\, v_1)$

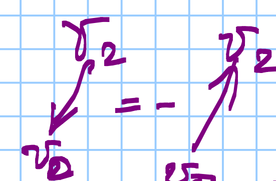
$\wr\wr$ $\;\;$ $\wr\wr$

$(v_1\, v_2\, v_0)$ $\;\;$ $(v_2\, v_1\, v_0)$

$\wr\wr$ $\;\;$ $\wr\wr$

$(v_2\, v_0\, v_1)$ $\;\;$ $(v_1\, v_0\, v_2)$

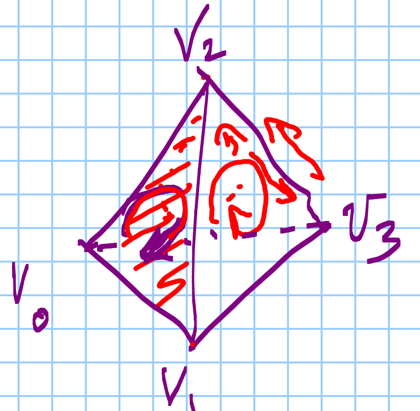
$$\partial S = (v_0\, v_1) + (v_1\, v_2) + (v_2\, v_0)$$



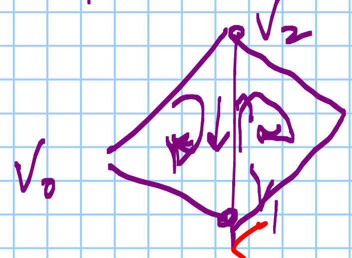
$$\partial S = (v_0\, v_1) - (v_0\, v_2) + (v_1\, v_2)$$

$$\partial (v_0\, v_1 \ldots v_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (v_0\, v_1 \ldots \hat{v}_i \ldots v_n)$$

$0 \quad 1 \quad i$



$$\partial (v_0\, v_1\, v_2\, v_3)$$
$$= v_1\, v_2\, v_3 - v_0\, v_2\, v_3$$
$$+ v_0\, v_1\, v_3 - \underline{v_0\, v_1\, v_2}$$



Thm $\partial^2 = 0$

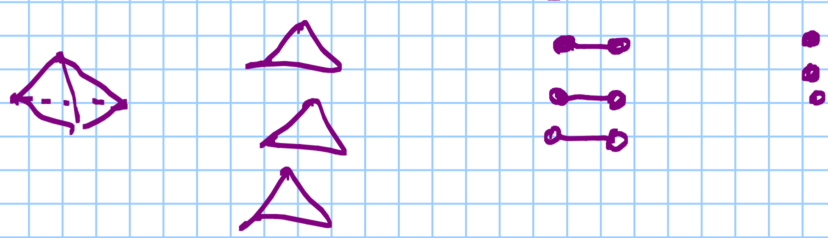
Pf (Pour $S = \Delta_3$)

$$\partial(\partial(v_0 v_1 v_2 v_3)) = \partial(\overset{0}{v_1}\overset{1}{v_2}\overset{2}{v_3}) - \partial(\overset{0}{v_0}\overset{1}{v_2}\overset{2}{v_3}) + \partial(v_0 v_1 v_3) - \partial(v_0 v_1 v_2)$$

$$= (v_2 v_3 - v_1 v_3 + v_1 v_2)$$
$$- (v_2 v_3 - v_0 v_3 + v_0 v_2)$$
$$+ (v_1 v_3 - v_0 v_3 + v_0 v_1)$$
$$- (v_1 v_2 - v_0 v_2 + v_0 v_1) = 0$$

complexe simplicial

$$\xrightarrow{\partial} S^3 \xrightarrow{\partial} S^2 \xrightarrow{\partial} S^1 \xrightarrow{\partial} S^0 \longrightarrow 0$$



Chapitre 4. Exemples de calcul d'homologie

X - espace

Suite de groupes - chaînes avec les applications de bord

$$\to C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

dim 2 — chaînes dim 1 — chaînes de dim 0

$$\boxed{\partial^2 = 0}$$

$$C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}$$

$$\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$$

$Z_1 = \operatorname{Ker} \partial_1 \subseteq C_1$ - groupe de cycles

$B_1 = \operatorname{Im} \partial_2 \subseteq C_1$ - groupe de bords

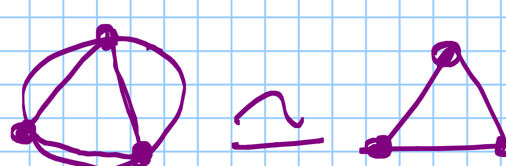
$B_1 \subseteq Z_1$ car $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$

$H_1 := Z_1 / B_1$ - le groupe quotient - le groupe commutatif.

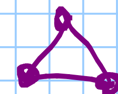
<u>Exemples</u> $B_1 = Z_1$, $H_1 \cong 0$

$H_1 \cong Z_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_n = Z_n / B_n$

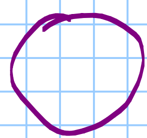
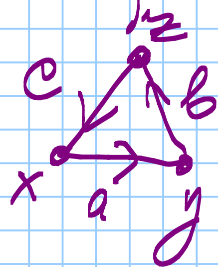
1. Cercle $X = S^1$



Remplacer le cercles par

qq chose homéomorphe correspondant aux simplexes $S^1 \simeq$  (sans intérieur)

squelette = 3 segments

 $\simeq$ 

sommets $\{x, y, z\}$

segments $\{a, b, c\}$

$X = \{a, b, c, x, y, z\}$

$a = (x\,y)$

$b = (y\,z)$

$c = (z\,x)$

Gps de chaînes:

$$\underset{0}{C_2} \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0 = 0} 0$$

pas de dim 2

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (a, b, c) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (x, y, z)

$la + mb + nc$ $\alpha x + \beta y + \gamma z$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$
$l, m, n \in \mathbb{Z}$

$\partial_0 = 0$ $x, y, z \to 0$

$\partial_1 : a \longmapsto y - x$ $(\underset{0}{x}\,\underset{1}{y}) \longmapsto (-1)^0 y + (-1)^1 x$

$b \longmapsto z - y$

$c \longmapsto x - z$

$\partial_2 : 0 \longmapsto 0$

$Z_0 = \operatorname{Ker} \partial_0 = C_0$, $B_0 = \operatorname{Im} \partial_1 = \langle y - x, z - y, x - z \rangle$

$H_0 = Z_0/B_0 = \langle x, y, z\rangle / \langle y-x, z-y, x-z\rangle$

On pense au quotient = poser tout dans B_0 égal à 0.

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow y = x \\ &\Rightarrow z - y = 0 \Rightarrow z = y \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = z$$

$H_0 \cong \mathbb{Z}$ tout élément de H_0 est de forme $\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\uparrow}{n}} \cdot x + \underset{(x-y)}{B_0}$

$$H_0 \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

$H_1 = Z_1/B_1$

$$\begin{array}{ccccccc} C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\partial_0 = 0} & 0 \\ 0 \to & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \to & 0 \end{array}$$

$Z_1 = \operatorname{Ker} \partial_1$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial(la + mb + nc) \\ &= l(y-x) + m(z-y) + n(x-z) \\ &= x(-l + n) + y(l - m) + z\cdot(m-n) \end{aligned}$$

$\Rightarrow n = l = m \Rightarrow \partial(a + b + c) = 0$

$Z_1 = \langle a + b + c\rangle \simeq \mathbb{Z}$

$B_1 = \operatorname{Im} \partial_2 = 0 \qquad H_1 \equiv Z_1/B_1 \equiv Z_1/0 = Z_1 \simeq \mathbb{Z}$

$H_0(S^1) = \mathbb{Z}$

$H_1(S^1) = \mathbb{Z}$

$H_k(S^1) = 0 \quad \forall k > 1$

H_0 mesure le nombre des parties connexes de X.

$Z_0 = C_0 = \operatorname{Ker} \partial_0$

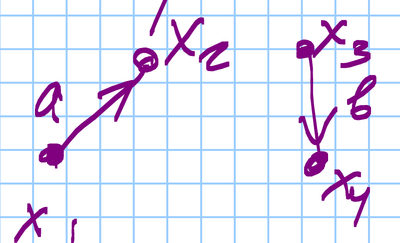
on quotient par $B_0 = \operatorname{Im} \partial_1$

$= \langle x_2 - x_1,\ x_3 - x_2, \dots \rangle$

on pose $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Le quotient est alors $n \cdot x_1$

X

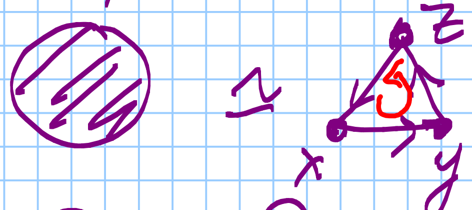


$\operatorname{Im} \partial_1 = \langle \underbrace{x_2 - x_1}_{\partial a},\ \underbrace{x_4 - x_3}_{\partial b} \rangle$

$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle / \langle x_2 = x_1,\ x_3 = x_4 \rangle$

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

<u>Example 2</u> $\quad X = D$



$A = (x\,y\,z) - \Delta_2$

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$C_2 \ni A$, $\quad C_1 \ni a, b, c$, $\quad C_0 \ni x, y, z$

$Z_1 = \operatorname{Ker} \partial_1 = \langle a + b + c \rangle \simeq \mathbb{Z}$ - 1 cycles

$B_1 = \operatorname{Im} \partial_2$

$$\partial_2(A) = \partial_2(xyz) = yz - xz + xy$$
$$= yz + zx + xy$$
$$= a + b + c$$

$$H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \frac{\langle a+b+c\rangle}{\langle a+b+c\rangle} = 0$$

$$H_0(D) = \mathbb{Z}$$
$$H_1(D) = 0$$
$$H_2(D) = Z_2/B_2 = \ker\partial_2/\operatorname{Im}\partial_3 \cong 0/0 \cong$$

groupes.

$$\ker\partial_2 = 0 \qquad C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1$$

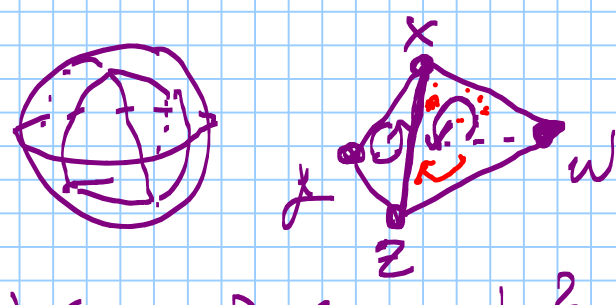
$$\blacktriangle \longrightarrow a+b+c$$

$$\partial_2 A = a+b+c \neq 0$$

le seul générateur

Exemple 3

S^2



$$X = \{(xyz), (xzw), (ywz), (xwy)\}^2$$

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0 = 0} 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^4 \longrightarrow \mathbb{Z}^6 \longrightarrow \mathbb{Z}^4 \longrightarrow 0$$

$\langle(xyz),(xzw),(ywz),(xwy)\rangle$ $\langle(xy),(yz),(y,w),(z,x),(zw),(xw)\rangle$ $\langle x,y,z,w\rangle$

$$H_n = Z_n / B_n = \ker\partial_n / \operatorname{Im}\partial_{n+1}$$

$$H_0 : Z_0 = C_0 = \langle x, y, z, w \rangle$$

$$B_0 = \langle y-x,\ z-y,\ w-y,\ x-z,\ w-z,\ w-x \rangle$$

$$Z_0/B_0 = \mathbb{Z} = \langle x + B_0 \rangle$$

$$H_1 : Z_1 = \ker\partial_1$$

$$\alpha(xy) + \beta(yz) + \gamma(yw) + \delta(zx) + \varepsilon(zw) + \eta(xw)$$

$$\xrightarrow{\partial_1} \alpha(y-x) + \beta(z-y) + \gamma(w-y) + \delta(x-z) + \varepsilon(w-z) + \eta(w-x) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & x(-\alpha + \delta - \eta) \\ & + y(\alpha - \beta - \gamma) \\ & + z(\beta - \delta - \varepsilon) \\ & + w(\gamma + \varepsilon + \eta) \end{aligned} \qquad \begin{array}{cccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \eta \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

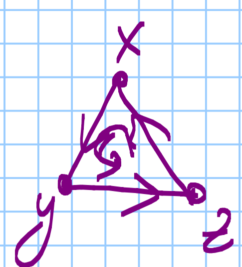
$$\xrightarrow[L_2+L_1]{-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3+L_2]{-L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

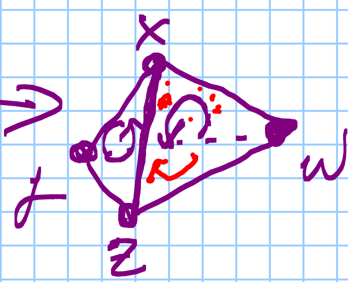
$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \eta \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & & & r & s & t \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= r - t \\ \beta &= -\gamma + r - t = s + t + r - t \\ &= s + r \\ \gamma &= -s - t \\ \delta &= r \\ \varepsilon &= s \\ \eta &= t \end{aligned}$$

$$Z_1 = (r-t)(xy) + (s+r)(yz) + (-s-t)(yw) + r(zx) + s(zw) + t\cdot(xw)$$

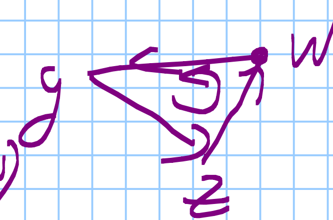
$$= r(xy+yz+zx) + s(yz-yw+zw) + t(-xy-yw+xw)$$

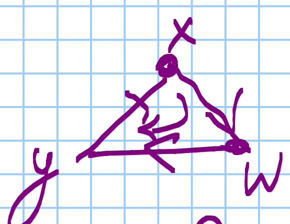




$yz + wy + zw$

$$-(xy) - (yw) + (xw) = (yx) + (wy) + (xw)$$





$$Z_1 = \langle \underbrace{xy + yz + zx}, \underline{yz - yw + zw}, \underline{yx + wy + xw} \rangle$$

$$B_1 = \operatorname{Im}\partial_2 \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

$$C_2 : l(xyz) + m(xzw) + n(ywz) + p(xwy)$$

$$\xrightarrow{\partial_2} l(\underbrace{yz - xz + xy}) + m(zw - xw + xz) + n(\underline{wz - yz + yw}) + p(\underline{wy - xy + xw})$$

$$\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

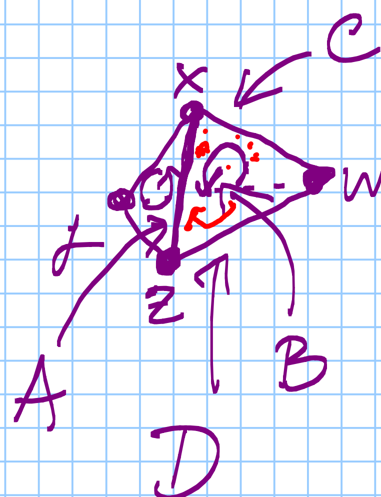
$$Z_1/B_1 = \mathbb{Z}^3/\mathbb{Z}^3 \cong 0$$

$$H_1(S^2) = 0$$

$$H_2(S^2) = Z_2 =$$

$$C_3 \xrightarrow{0} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1$$

$$\operatorname{Ker} \partial_2 = Z_2$$

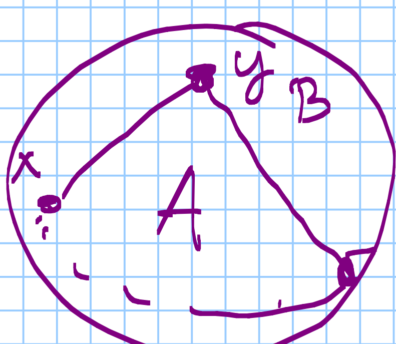


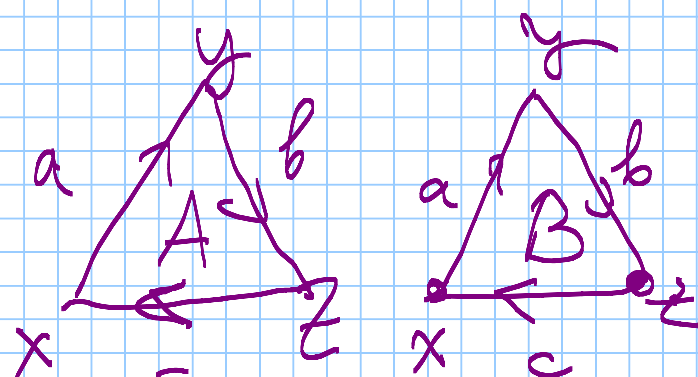
$$\partial_2(A+B+C+D) = 0$$

$$Z_2 = \langle A+B+C+D \rangle \cong \mathbb{Z}$$

$B_2 = 0$ donc $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$

Eilenberg Δ-complexe





$$0 \to C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0$$

$$\langle A, B \rangle \qquad \langle a, b, c \rangle \qquad \langle x, y, z \rangle$$

H_1 $\quad Z_1 : \quad \alpha a + \beta b + \gamma c$

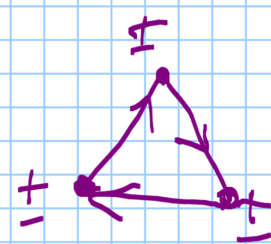
$$\downarrow \partial_1$$

$$\alpha(y - x) + \beta(z - y) + \gamma(x - z)$$

$$= x(\gamma - \alpha) + y(\alpha - \beta) + z(\beta - \gamma) = 0$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$

$Z_1 = \langle a + b + c \rangle$

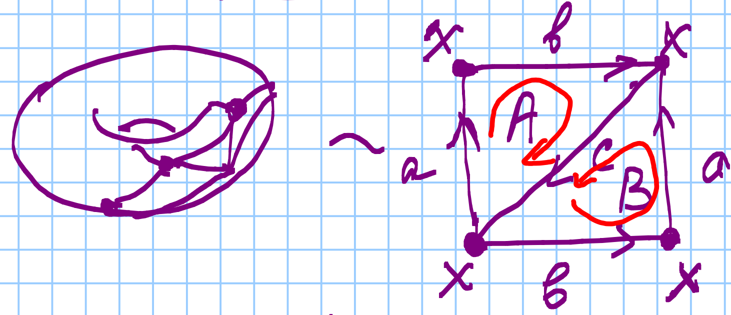


$B_1 = \operatorname{Im} \partial_2 = \langle a + b + c \rangle$

$$H_1 = Z_1 / B_1 \cong 0$$

Chapitre 5. Δ complexes

Nombres de Betti et torsions



$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0, \quad \partial_0 = 0$$

$$C_2 = \langle A, B\rangle, \quad C_1 = \langle a, b, c\rangle, \quad C_0 = \langle x \rangle$$

$$H_k = Z_k / B_k$$

$$Z_k = \operatorname{Ker} \partial_k$$

$$B_k = \operatorname{Im} \partial_{k+1}$$

$$H_0 = Z_0 / B_0$$

$$Z_0 = C_0 = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$$

$$B_0 = \operatorname{Im} \partial_1$$

$$\partial_1 : a \longmapsto x - x = 0, \quad \partial_1 : b \to 0, \quad \partial_1 : c \to 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &H_0(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \\ &H_1(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ &H_2(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \\ &H_k(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}) = 0, \ k > 2 \end{aligned}}$$

$$H_1 = Z_1 / B_1$$

$$Z_1 = \operatorname{Ker} \partial_1 = \langle a, b, c \rangle$$

$$\partial_1 a = 0$$

$$B_1 = \operatorname{Im} \partial_2$$

$$\partial(A) = a + b + c = \partial(B)$$

$$H_1 = \langle a, b, c \rangle / \langle a + b + c \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$\langle a, b, c \rangle = \langle a + b + c, b, c \rangle$$

$$ma + nb + p \cdot c = m(a + b + c) + (n - m)b + (p - m)c$$

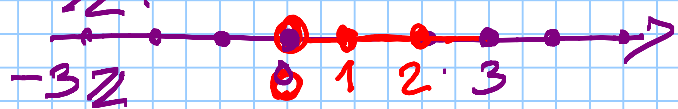
$$H_2 = \operatorname{Ker} \partial_2, \quad \partial_2(\alpha A + \beta B) = \alpha(a + b + c) + \beta(a + b + c)$$

$$\alpha(a+b+c)+\beta(a+b+c)=0 \to \alpha=-\beta$$

$\ker \partial_2 = \langle A-B \rangle$, $\partial_3 = 0$

Aparté Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

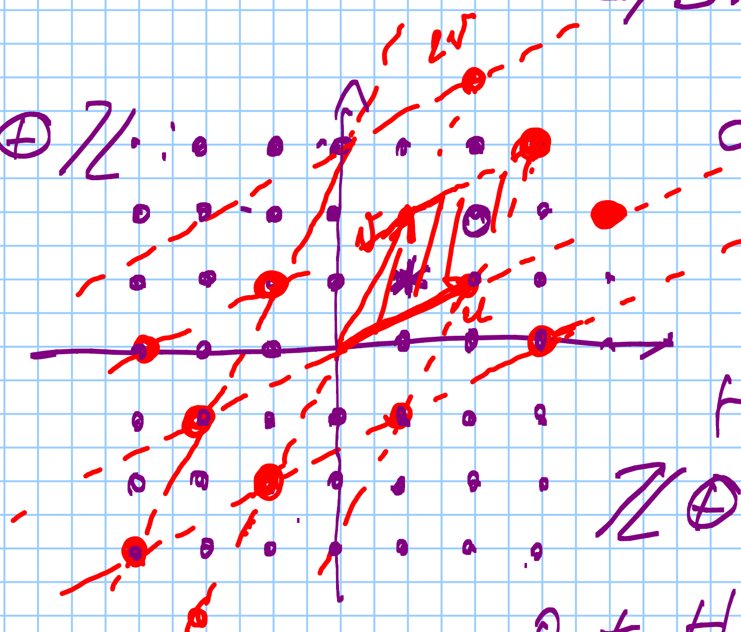
$\mathbb{Z}$:



$H = 3\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \{\bar 0, \bar 1, \bar 2\}$

$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$:



$\det\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=3$

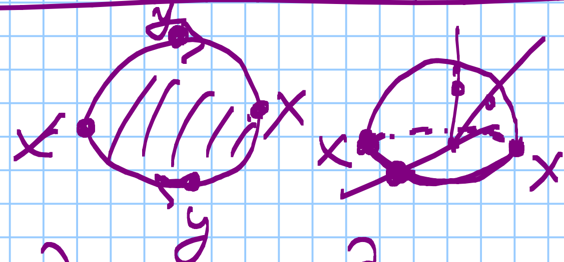
$H = \langle \vec u, \vec v\rangle$

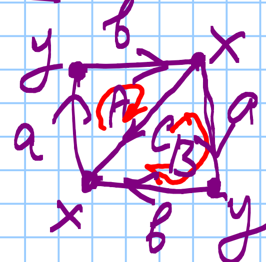
$H = a\vec u + b\vec v$

$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/H$ — 3 classes d'équivalence

- $0 + H$
- $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + H$
- $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + H$

$\mathbb{R}P^2$:





$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$\langle A, B\rangle$ $\langle a, b, c\rangle$ $\langle x, y\rangle$

$H_0 = Z_0 / B_0, \ \ker \partial_0 = Z_0 = C_0 = \langle x, y \rangle$

$B_0 = \operatorname{Im} \partial_1 = \langle x - y \rangle$

$\partial_1(c) = x - x = 0, \ \partial_1(a) = y - x, \ \partial_1(b) = x - y$

$\partial_1(ma + nb + p \cdot c) = m(y - x) + n(x - y)$
$= (n - m)(x - y)$

$\langle x, y \rangle = \langle x - y, y \rangle$

$H_0 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$

$H_1 = Z_1 / B_1, \ Z_1 = \ker \partial_1 = \langle c, a + b \rangle$

$m = n \quad \partial_1(n(a + b)) = 0$

$B_1 = \operatorname{Im} \partial_2 = \langle a + b + c, 2c \rangle$

$\partial_2(\lambda A + \mu B) = \lambda(a + b + c) + \mu(a + b - c)$
$(\lambda + \mu)(a + b) - (\lambda - \mu) c$

$H_1 = Z_1 / B_1 = \langle c, a + b + c \rangle / \langle a + b + c, 2c \rangle$

$\langle c, a + b \rangle = \langle c, a + b + c \rangle$

$\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{0, 1\}$

$H_2 = Z_2 / B_2 = Z_2 / 0 \cong 0/0 \cong 0$

$$\partial_2(\lambda A+\mu B) = (\lambda+\mu)(a+b) - (\lambda-\mu)c = 0$$

$$\begin{cases} \lambda+\mu = 0 \\ \lambda-\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z} \\ H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ H_k(\mathbb{R}P^2) \cong 0 \quad k \geq 2 \end{array}}$$

Nombres de Betti de l'espace X

$$b_n = \dim H_n(X)$$

$$H_n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{b_n} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_{(n_1)} \oplus \mathbb{Z}_{(n_2)} \oplus \dots \mathbb{Z}_{(n_k)}}_{\text{coeff. de Torsion}}$$

Thme $\chi(X)$ = caractéristique d'Euler Poincaré de X

$$= b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots \pm b_n$$

Rq. Caractéristique d'Euler d'un polyèdre

$$S - A + F = \chi(\text{Polyèdre})$$

C'est une invariante de l'espace X.

Exemples

S^2

$$\chi(S^2) = 2$$

$b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$

$H_0 = \mathbb{Z}$ $\quad H_2 = \mathbb{Z}$

$H_1 = 0$ $\quad H_3 = 0$ etc.

$T^2 = S^1 \times S^1$ $\qquad \chi(T) = 1 - 2 + 1 = 0$

$H_0(T) = \mathbb{Z}$

$H_1(T) = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$H_2(T) = \mathbb{Z}$

$H_k(T) = 0 \quad k > 2$

$\mathbb{R}P^2 \qquad \chi(P) = 1$

$H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$

$H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$

$H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$

$H_3(\mathbb{R}P^2) = 0$ etc

$\chi(\mathbb{R}P^2) = 1 - 0 + 0 \ldots = 1$

Chapitre 6. Variété. Degré. Boule chevelue

1. Variété de dim n

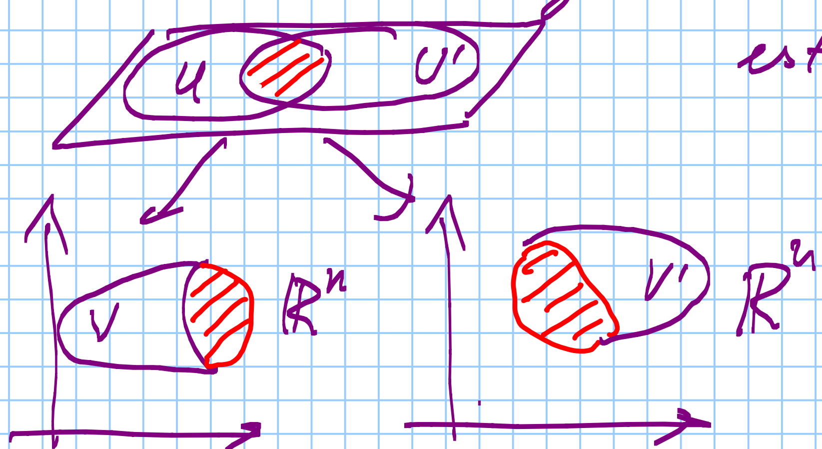
C'est un esp. topologique M t.q. $\forall x \in M$ possède un voisinage U homéom. à un domaine V de $\mathbb{R}^n$

Soit $\varphi : U \to V$ cet homéomorphisme est une carte

Une carte donne des coordonnées locales sur X par $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$

Collection des cartes couvrant M entièrement s'appele un atlas

soit U, U' voisinages avec le cartes $\varphi : U \to V$ et $\varphi' : U' \to V'$ et $Z = U \cap U'$ alors un changemnt des cartes sur Z:



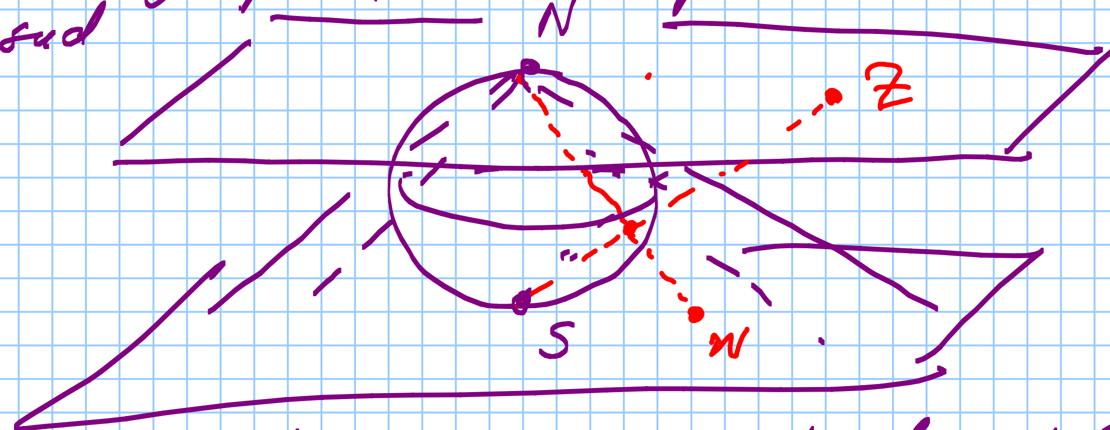
est bien défini:

$\varphi' \varphi^{-1} : \varphi'(Z) \to \varphi(Z)$

Variété est dite orientable si toutes les changements de cartes preservent l'orientation (i.e. Jacobien de $\varphi' \cdot \varphi^{-1}$ est positif pour $\forall$ couples φ, φ')

Exemples :

Une sphère : deux cartes - projections stéréographiques - du pôle Nord et du pôle sud



N'importe quel point de la sphère sauf N et S possède deux cartes

z et w - coord. en haut et en bas

avec des homéom. entre les voisinage avec une relation $z \cdot w = 1$ (à vérifier)

notion de variété $\longleftrightarrow$ les fonction de recollements

lisse $\longleftrightarrow$ lisses

differentiable $\longleftrightarrow$ differentiables

etc.

Thm Toute variété M - connexe fermée (= sans bord) triangulée de dim n a

$$H_n(M) \cong \mathbb{Z}$$

Si M est orientable et $H_n(M) \cong 0$ sinon

Démo : $\sigma = \sigma_1^n + \dots + \sigma_m^n$ - somme des simplexes de dim maximale n, orientée de façon coherente

$$0 \to C_n \to C_{n-1} \to \dots \to C_0 \to 0$$

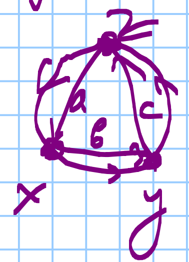
$\partial \sigma = 0$

σ - est un cycle

$$0 \mapsto \Delta \to 0$$ car fermée et orientable

Exemple

triangulation d'un cercle S^1 :



une carte, une applic vers $\mathbb{R}^n$ (ici vers $\mathbb{R}$) donne l'orientation

le bord $a \longmapsto x - z$

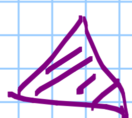
$b \longmapsto y - x$

$c \longmapsto z - y$

Comme c'est une variété oriéntable la somme des bord est 0.

On a toujours une orientation compatible de sort que le bord de n-simplexe est 0, car tout s'annule

---

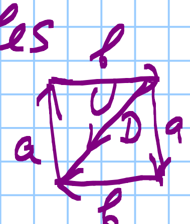


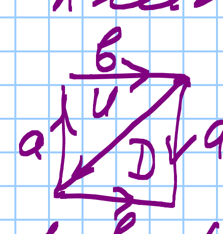
– n'est pas fermé car ici $\partial(\blacktriangle) = \Delta \neq 0$, c'est contractif et $H_2(\blacktriangle) = 0$

Si on n'a pas d'orientation coherente alors $\sigma_1^n + \ldots + \sigma_m^n$ – complexe de dim n ne font pas de cycle, donc

$\operatorname{Ker} \partial^n = 0$ et on a $H_n(M) = 0$

Exemples $\mathbb{R}P^2$ ou une bouteille de Klein.
non orientables





$\partial(mU + nD)$ n'est jamais 0

Pas de bord, i.e. variétés fermées.

(Rappel : pt. de bord – n'importe quel voisinage contient des pts d'intérieur de la variété et de l'extérieurs).

Pour une variété non-orientable, il n'y a pas de cycles de dim n !

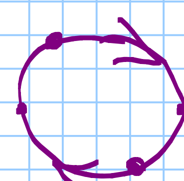
Pour Klein : $\partial U = a + b + c$
$\partial D = a - b - c$

$\partial(mU + nD) \neq 0$ pour $m^2 + n^2 \neq 0$.

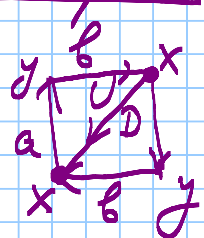
Donc $H_2(\text{Klein}) = 0$.

<u>Rq.</u> Pour une variété M orientée fermée non-connexe $H_n(M) = \mathbb{Z}^m$ où m – le nombre des composantes connexes.

<u>Exemple</u> $\mathbb{R}P^n$



points de bord opposés identifiés.



triangulation

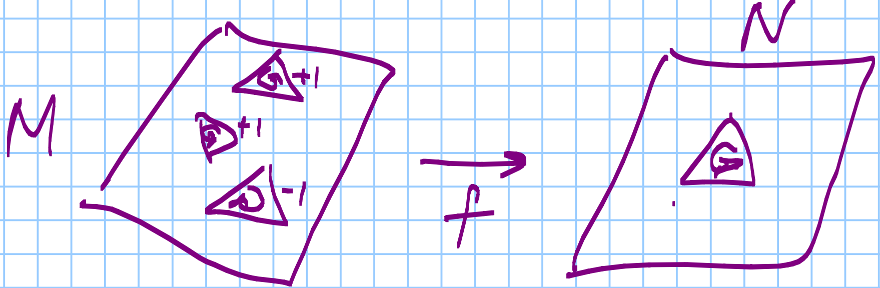
du coup – c'est une variété fermée – on n'a pas de bord, mais $mU + nD$ n'est pas un cycle ! $\ker \partial_2 = 0 \Rightarrow H_2(M) = 0$

2. Defn (Notion de degré)

Soient M, N deux variétés fermées orientables de dim n. Soit $f: M \to N$ applic simpliciale (préservante les simplexes) et application induite :

$$f_*: H_n(M) \to H_n(N)$$

alors $f_*(1)$ est appelé le degré de f.

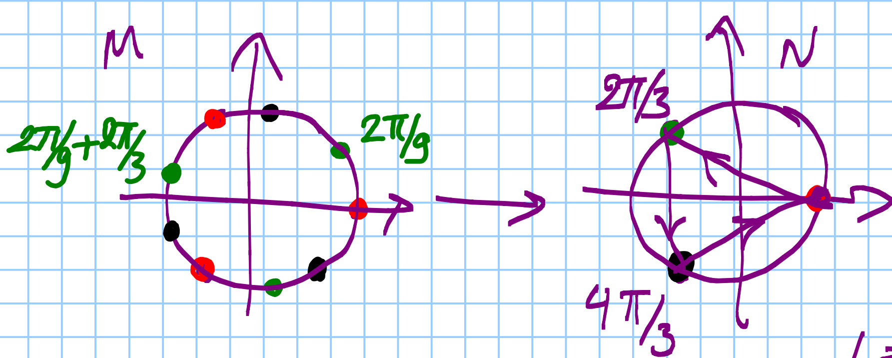


Ici $f_*(1) = \Sigma \pm$ orientation de l'image réciproque de Δ dans N

Exemple :

cercle $S^1 \to S^1$ $\quad S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$z \longmapsto z^3$



$e^{2\pi i/3} = (e^{it})^3$

$\Rightarrow 3t = 2\pi/3 + 2\pi k$

$t = 2\pi/9 + 2\pi k/3$

$1 = e^{2\pi k i} = (e^{it})^3$

$\Rightarrow t = \frac{2\pi k}{3}$

$t = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

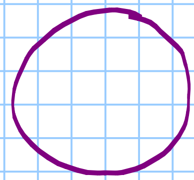
Il faut tourner 3 fois pour "couvrir" le deuxième cercle.

Le degré est 3 :

le cycle dans le premier S^1 est fait de 9 pts i.e. $1 \in H_1(M)$ est envoyer vers 3 cycles dans $H_1(N)$

Du coup c'est aussi le nombre de préimages.

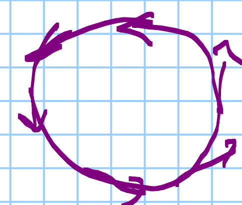
__3.)__ Les application de la notion de degré ? Thm. de la boule chevelue.



S^n n paire

il n'y a pas de champs tangent sans singularité

A savoir: sur S^1



champs tangent

t.q. Jacobien est toujours nonnul.

Pour S^2:

il y toujours un epi: un pt. dans lequel le Jacobien est 0.

Il'y a un pt où le champs change la direction.

Prennons une application
une applic.

$r: S^2 \to S^2$ envoyant les pts vers leur opposée.

$z \mapsto -z$

et aussi

$id: z \mapsto z$

Considerations preliminaires:

Ses applications sont non-homotopes car le degré est preservée par homotopie.

dég $r = -1$

dég $id = 1$

Supposons qu'il existe un champs sans 0. Ce champs alors on peut "étirer" pour faire l'homotopie entre l'applic identité et l'application antipodale.

Son degré est $(-1)^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ car

$r : (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (-x_1, -x_2, \dots, -x_{n+1})$ 7

donc chaque coordonnée donne (-1)

d'où $(-1)^{n+1}$ en tout.

D'où la boule chevelue en dim. paire de S^n car $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ donné par l'équation $\|(x_1, \dots, x_{n+1})\| = 1$.

Donc $n+1$ coordonnées donnant $(-1)^{n+1}$ comme degré de l'applic anti-podale

<u>Preuve du lemme de boule chevelue</u>

Soit $f : S^n \to S^n$ une applic non surjective $f : S^n \to S^n$ on a

a) $\deg id = 1$

b) $\deg f = 0$

$f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f_*(\alpha) = d \cdot \alpha$

$\deg f = d$ (par définition de degré)

Si f n'est pas surjective car alors f est bien définie sur $S^n \setminus \{x_0\}$ où x_0 n'a pas de préimage et $H_n(S^n \setminus \{x_0\}) = 0$ car $S^n \setminus \{0\} = D^n$ contractible.

$$S^n \xrightarrow{f} S^n \setminus \{x_0\} \hookrightarrow S^n$$

c) $f \simeq g$ homotopes $\Rightarrow \deg f = \deg g$

d) $\deg fg = \deg f \cdot \deg g$.

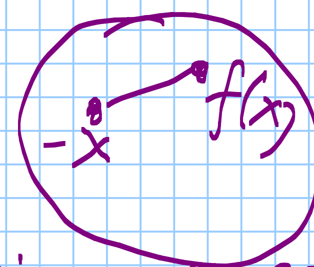
e) $\deg f = -1$ si f est une réflexion par rapport à un hyperplan.

f) $-\mathbb{1} : S^n \longrightarrow S^n$ (donné par $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$) est deg n.

$(x_1, \ldots x_{n+1}) \longmapsto (-x_1, -x_2, \ldots, -x_{n+1})$

g) Si f n'a pas de pt fixe alors

$\deg f = (-1)^{n+1}$



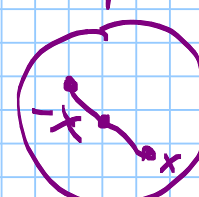
Si $f(x) \neq x \quad \forall x$ alors

Homotopie de f à une applic antipodale.

$H : t \longmapsto (1-t) f(x) - tx$ passe pas par l'origine.

Donc si f n'a pas de pts fixe

$$f_t(x) = \frac{(1-t) f(x) - tx}{|(1-t) f(x) - tx|}$$



défini l'homotopie de f vers l'application antipodale.

$(1-t) f(x) - tx$ — paramétrise un segment entre $-x$ et $f(x)$

0 est sur le segment de $-x$ à $f(x)$ seulement si $f(x) = x$

Chapitre 7. Homologie cellulaire. Homologie relative

1) CW-complexe (=complexe cellulaire)

1) X^0 - 0-cellules = pts

2) Recurrence On forme X^n à partir de X^{n-1} en attachant les n-cellules

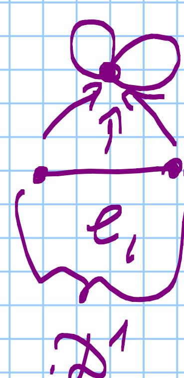
e^n_α par les applications

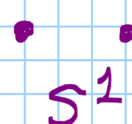
$\varphi_\alpha : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$

e^n - interieur du disque $(D^n \setminus S^{n-1})$

$$X^n = X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha$$

e^1 = interieur de D^1 (segment) colé à un pt.





à la place des simplexes on a des cellules, n-Bord est donné par la façon de recollement d'une cellule de dim n aux cellules de dim $n-1$

2) Homologie relative

Soit $A \subset X$

Soient $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$ - cellules de X aux cellules de A près

Comme si A est écrasé en un pt.

$$0 \to A \to X \to X/A \to 0$$

$C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X)$ se restraint à

$C_n(A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(A)$ - c'est bien défini

L'homologie relative est donné par les cycles relatives

à partir d'une suite exacte courte on a une suite exacte longue d'homologie par le lemme de serpent.

$$C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A)$$

~~Le cycle relatif~~ on regarde $\alpha \in C_n(X)$ t.q. $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$ au lieu de $\partial\alpha = 0$

Le bord relatif: cycle α est trivial dans $H_n(X, A)$ si $\alpha = \partial\beta + \gamma$ où $\beta \in C_{n+1}(X)$ et $\gamma \in C_n(A)$

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \\ C_{n+1}(A) & & C_n(A) & & C_{n-1}(A) \end{array}$$

Dans X/A plus de $C_n(A)$ ...

Suite exacte longue :

$$0 \to A \to X \to X/A \to 0$$

donne

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X,A) \to H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X) \to \cdots$$

$$\cdots \to H_0(X,A) \to 0$$

Comment on utilise cela ?

<u>Lemme</u> Si X est un CW-complexe

(a) $H_k(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} & \text{si } k = n \end{cases}$

libre abélien avec # de $\mathbb{Z}$ = # de cellules ajouté.

(b) $H_k(X^n) = 0 \quad k > n$

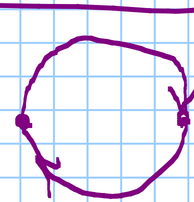
(c) $i : X^n \hookrightarrow X$ induit un isom.

$$i_* : H_k(X^n) \to H_k(X)$$

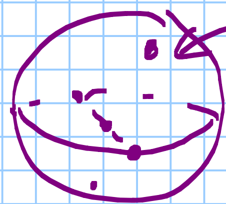
$$H_n(X^n, X^{n-1}) \cong H_n(X)$$

3) L'homologie cellulaire de $\mathbb{R}P^n$

$\mathbb{R}P^n = S^n / \{v \cong -v\}$



$= D^n /$ pts antipodaux sur ∂D^n



e^2 est colé doublement

pts antipodeaux $- \mathbb{R}P^{n-1}$

ici $\partial D^n \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$ avec les pts opposés identifiés

Autrement dit, on obtient $\mathbb{R}P^n$ à partir de $\mathbb{R}P^{n-1}$ en collant à $\mathbb{R}P^{n-1}$ une cellule e^n

$$\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{R}P^{n-1} \bigsqcup_{\alpha} D^n$$

α - identification de pts opposés sur le bord du disque application d'attachement de $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$

On a un recouvrement par S^{n-1} du bord de $\mathbb{R}P^{n-1}$ en double.

Par recurrence on a

$$\mathbb{R}P^n = \underset{\mathbb{Z}}{e^0} \cup \underset{\mathbb{Z}}{e^1} \cup \underset{\mathbb{Z}}{e^2} \cup \dots \cup \underset{\mathbb{Z}}{e^n}!$$

L'homologie

S^{n-1}

$\downarrow$

$\mathbb{R}P^{n-1}$ à un seul pt. de $\mathbb{R}P^{n-1}$ correspond deux pts de S^{n-1}

Donc on a le complexe

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \dots \to \mathbb{Z} \to 0$$

n-cellule   0-cellule

$$\to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to$$
$$e_k \mapsto e_{k-1}$$

attachement ∂e^k par double projection sur e^{k-1}.

Pour calculer l'application du bord

$$S^{k-1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}P^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} = S^{k-1}$$

application projection   application quotient

e^2 colé à e^1 ?

applic des pts opposés à le dég $(-1)^{n+1}$

$$\text{dég } q\varphi = \deg 1 + \deg(-1)$$
$$= 1 + (-1)^k \quad \text{pts opposé}$$

Donc on a $\dots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$

Reponse : $H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0,\ k=n \text{ impaire} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & k \text{ - impaire} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

En particulier,

$$H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$$
$$H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$$

Etudier $H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k\text{-impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$0 \to \underset{2n}{\mathbb{Z}} \longrightarrow \qquad \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} 0$$

Notion d'homologie singulières :

à la place de simplexes on regarde des applications des cxs simpliciales vers les variétés

Chaînes : applic continues des simplexes vers X.

Changement par rapport aux chaînes simpliciales : on ne se soucie plus de singularités.

Par ex. pour un pts on peut mettre des applics de simplexes de toute dim vers un pt.

Chapitre 8. Homologie avec les coefficients.

(on suit ici Matveev 1.16–1.18)

G – gp abelien

$C_n(K, G)$ $\{g_1\sigma_1 + \dots + g_k\sigma_k \mid \sigma_i$ – n-simplexes$\}$ pour l'homologie simpliciale

C_n – chaînes ; K – complexe

ou n-cellules pour l'homologie cellulaire

simplexe singuliers pour l'homologie singulière

$$\partial_n(g\sigma) = \sum \varepsilon_i\, g\,\delta_i$$

$\delta_i \in K$ - dim $n-1$

$$\partial_n : C_n(K,G) \to C_{n-1}(K,G)$$

ε_i – le coefficient d'incidence ($\delta_i \subset$ le bord de σ)

$$H_n(pt) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ G, & n = 0 \end{cases}$$

pt = 0-cellule (0-simplexe)

$$\to C_{n+1}(K,G) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K,G) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K,G) \to$$

$\partial_n \partial_{n+1} = 0$

$H_n(K,G)$ – gp d'homologie à coeffs dans G.

Tout théorème d'avant (t.q. lemme du serpent, suite exacte d'un couple etc...)

Thm de coeffs universelles

Pour $\forall$ complexe simplicial K:

$$H_n(K,G) = H_n(K) \otimes G \oplus H_{n-1}(K) * G$$

produit tensoriel — torsion

Rq. $A * B$ est noté parfois $\mathrm{Tor}(A,B)$

Produit tensoriel

Soit A, B - deux gp. abeliens

$(a,b) \longmapsto a \otimes b$ défini de façon axiomatique:

1. $A \otimes B = B \otimes A$
2. $(A_1 \oplus A_2) \otimes B = A_1 \otimes B \oplus A_2 \otimes B$
3. $A \otimes \mathbb{Z}_m = A/mA$ (où $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et A/mA - gp quotient de A par les éléments de forme ma)

Exemples: $\mathbb{Z}_k \otimes \mathbb{Z}_m = (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})/m\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_k \otimes \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{\mathrm{pgcd}(m,k)}$

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

et si $\mathrm{pgcd}(m,k) = 1$ alors $\mathbb{Z}_k \otimes \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$

$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Produit tensoriel est une opération naturelle car $C_n(K;G) \simeq C_n(K) \otimes G$

$a\sigma \otimes g \simeq g'\sigma$

$$\to C_{n+1}(K)\otimes G \to C_n(K)\otimes G \to C_{n-1}(K)\otimes G \to$$

<u>Defn.</u> de produit torsion de A et B

$$0 \to F_1 \overset{i}{\hookrightarrow} F_2 \twoheadrightarrow A \to 0$$ une suite exacte

avec des gps libres.

(exemple modèle $A = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$:

$$0 \to \mathbb{Z} \xhookrightarrow{\times k} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to 0)$$
$$m \mapsto km$$

Cela forme une <u>resolution libre</u> de A

(i.e. par les gps des éléments sans relations t.q. $\mathbb{Z}$)

Produit tensoriel de A avec B :

$$0 \to A * B \xrightarrow{\beta} F_1 \otimes B \xrightarrow{\alpha} F_2 \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

n'est plus une injection

pour faire cette suite exacte on rallonge par $A * B$ i.e. si $\ker \alpha \neq 0$ alors pour que la suite reste exacte il faut que $\operatorname{Im} \beta = \ker \alpha$, on introduit alors $A * B$.

Axioms de $*$: 1. $A * B = B * A$

2. $(A_1 \oplus A_2) * B = A_1 * B \oplus A_2 * B$

3. $A * \mathbb{Z}_m$ - sous gr de A des élém t.q. multiplication par m donne 0

4. $A * B = \mathrm{Tor} A * \mathrm{Tor} B$

où

$\mathrm{Tor} A = \{$ éléments de A d'ordre fini: $a \in A$, $\exists m < \infty$ t.q. $a^m = 0\}$

dans $A * B$ - se trouve les éléments de $F \otimes B$ qui étaient libres dans F mais en multipliant par $\otimes B$ arrêtent d'être libres

$(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_m = 0, \quad \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{pgcd(m,n)})$

Preuve (de thm des coeffs universelles)

Une observation sur les complexes:

$C(K)$ est toujours une somme directe des deux types de complexes:

$$E(m): \to 0 \to \overset{m+1}{0} \to \overset{m}{\mathbb{Z}} \to \overset{m-1}{0} \to \dots 0$$

$$D(m,k): \to 0 \to \overset{m+1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\times k} \overset{m}{\mathbb{Z}} \to 0 \to$$

(En effet on a vu des complexes du genre

$[\quad] \leftarrow$ diffl une matrice

$$\to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to$$

Ce qu'on dit que on diagonalise la matrice et représente la différentielle comme une matrice diagonale !)

$C(K,G) = C(K) \otimes G$ donne alors

les sommes de

$E(m) \otimes G$ et $D(m,k) \otimes G$

D'où pour $E(m) \otimes G$ on a

$H_m(E(m)) = \mathbb{Z}$ le reste d'homologie est 0

et $H_m(D(m,k)) = \mathbb{Z}_k$

et $\begin{matrix} E(m) \otimes G \\ D(m,k) \otimes G \end{matrix}$ donne le thm