GeoTopo Fiche 2 bis

Espaces simplement connexe

Exo 1. Soit X connexe par arcs.
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. X est simplement connexe
2. Toute application continue $f : S^1 \to X$ est homotope à une application constante
3. Toute application continue $f : S^1 \to X$ peut être relevée à une application continue $D^2 \to X$
4. Tout couple de chemins $s_1, s_2 : I \to X$ t.q. $s_1(0) = s_2(0) = x_0$ et $s_1(1) = s_2(1) = x_1$ sont homotopes

Exo 2. Soit X une reunion de deux ouvert simplement connexe U et V t.q. $U \cap V$ soit connexe par arcs.
Montrer que X est simplement connexe

Produit directe

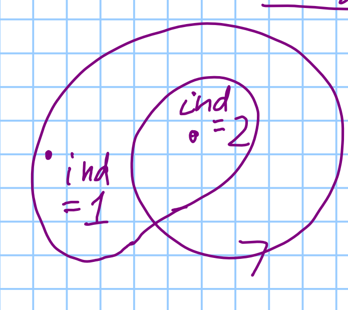
Exo 3. Montrer que pour X, Y - deux espaces topologiques

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

et en déduire que

$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$

Degré d'un lacet



• ind=0 Soit $u : S^1 \to \mathbb{R}^2$ un lacet
Alors $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus u(S^1)$
u défini un élément dans
$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus x) = \mathbb{Z}$

C'est l'indice de x.

$$u: S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{x\} \rightsquigarrow \varphi_{u,x}: S^1 \to S^1$$
$$z \mapsto \frac{u(z)-x}{|u(z)-x|}$$

L'homomorphisme induit $(\varphi_{u,x})_*: \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ envoit le générateur α du $\pi_1(S^1)$ vers l'élément $k\alpha$, où $k = \mathrm{ind}(u,x)$

<u>Exo 4</u> L'application $x \mapsto \mathrm{ind}(u,x)$ défini une fonction localement constante sur $\mathbb{R} \setminus u(S^1)$.

<u>Exo 5</u> Trouver les valeurs de la fonction $\mathrm{ind}: \mathbb{R}^2 \setminus u(S^1) \to \mathbb{Z}$ pour les lacets u:

(a) $u(z) = z$,

(b) $u(z) = \bar{z}$

(c) $u(z) = z^2$,

Ici: $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$