TD 3 – DÉRIVÉES, GRADIENT, DIFFÉRENTIELLE, JACOBIENNE

Exercice 11 – Dérivées partielles
Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles (où exactes s'il n'y a qu'une variable) et détérminer l'ensemble où les fonctions sont différentiables :

a) $f(x,y) = y\ \sin(xy)$
b) $g(u,v) = \left(uv^2, \frac{1}{u+v-1}\right)$
c) $h(x,y,z) = \left(x^2(y+1), xz^2, y+1\right)$
d) $\gamma(t) = \left(\sqrt{2+t}, \sqrt{2-t}\right)$
e) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$
f) $\phi(p,q) = \left(\ln(p^2q^2), \ln(p-q+1)\right)$
g) $u(\omega,t) = \left(e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t\right)$
h) $F(r,\theta,\varphi) = \left(r\cos\varphi, r\sin\theta\right)$

Corrigé

a) $f(x,y) = y\sin(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2\cos(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy)$$

Domaine : $D_f = \mathbb{R}^2$. Puisque les dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b) $g(u,v) = \left(uv^2, \frac{1}{u+v-1}\right)$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \left(v^2, -\frac{1}{(u+v-1)^2}\right)$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \left(2uv, -\frac{1}{(u+v-1)^2}\right)$$

Domaine : $D_g = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u+v-1 \neq 0\right\}$. Puisque les dérivées partielles sont définies et continues sur D_g, la fonction g est de classe C^1 sur D_g.

c) $h(x,y,z) = \left(x^2(y+1), xz^2, y+1\right)$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = \left(2x(y+1), z^2, 0\right)$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = \left(x^2, 0, 1\right)$$
$$\frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = \left(0, 2xz, 0\right)$$

Domaine : $D_h = \mathbb{R}^3$. Les dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^3$, donc la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

d) $\gamma(t) = \left(\sqrt{2+t}, \sqrt{2-t}\right)$

$$\gamma'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2+t}}, \frac{-1}{2\sqrt{2-t}}\right).$$

Domaine : $D_\gamma = \left\{t \in \mathbb{R} \mid 2+t \geqslant 0,\ 2-t \geqslant 0\right\}$. La dérivée est définie et continue sur l'ensemble $D = \left\{t \in \mathbb{R} \mid 2+t > 0,\ 2-t > 0\right\}$, donc la fonction γ est dérivable sur D et même de classe C^1.

e) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$

$$\frac{\partial G}{\partial R}(R,T) = 3R^2T + 2RT^2 + T^3$$
$$\frac{\partial G}{\partial T}(R,T) = R^3 + 2R^2T + 3RT^2$$

Domaine : $D_G = \mathbb{R}^2$. Puisque les dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

f) $\phi(p,q) = \big(\ln(p^2q^2), \ln(p-q+1)\big)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p}(p,q) = \Big(\frac{2pq^2}{p^2q^2}, \frac{1}{p-q+1}\Big) = \Big(\frac{2}{p}, \frac{1}{p-q+1}\Big)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial q}(p,q) = \Big(\frac{2p^2q}{p^2q^2}, -\frac{1}{p-q+1}\Big) = \Big(\frac{2}{q}, -\frac{1}{p-q+1}\Big)$$

Domaine :

$$\begin{aligned} D_\phi &= \Big\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \,|\, p^2q^2 > 0,\ p-q+1 > 0\Big\} \\ &= \Big\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \,|\, p \neq 0,\ q \neq 0,\ q < p+1\Big\}. \end{aligned}$$

Puisque les dérivées partielles sont définies et continues sur D_ϕ, la fonction ϕ est de classe C^1 sur D_ϕ.

g) $u(\omega,t) = \big(e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t\big)$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega}(\omega,t) = \big(te^{\omega t}, t\cos(\omega t), t\big)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(\omega,t) = \big(\omega e^{\omega t}, \omega\cos(\omega t), \omega\big)$$

Domaine : $D_u = \Big\{(\omega,t) \in \mathbb{R}^2\Big\} = \mathbb{R}^2$. Puisque les dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

h) $F(r,\theta,\varphi) = \big(r\cos\varphi, r\sin\theta\big)$

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta,\varphi) = \big(\cos\varphi, \sin\theta\big)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) = \big(-r\sin\varphi, 0\big)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) = \big(0, r\cos\theta\big)$$

Domaine : $D_F = \Big\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3\Big\} = \mathbb{R}^3$. Les dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^3$ donc la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 – Gradient et différentielle des fonctions réelles

Pour les fonctions suivantes, ecrire le gradient et la différentielle en tout point, et puis au point indiqué :

a) $f(x,y) = y\sin(xy)$ en $\big(1, \frac{\pi}{2}\big)$

b) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$ en $(3,2)$

Corrigé

a) $f(x,y) = y\sin(xy)$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2\cos(xy) \\ \sin(xy) + xy\cos(xy) \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} f(1,\pi/2) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{4}\cos(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) + \frac{\pi}{2}\cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$df_{(x,y)} = y^2\cos(xy)\ dx + \Big(\sin(xy) + xy\cos(xy)\Big)\ dy \qquad df_{(1,\pi/2)} = 0\cdot dx + 1\cdot dy = dy$$

b) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$

$$\vec{\nabla} G(R,T) = \begin{pmatrix} 3R^2T + 2RT^2 + T^3 \\ R^3 + 2R^2T + 3RT^2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} G(3,2) = \begin{pmatrix} 3\cdot 9\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 4 + 8 \\ 27 + 2\cdot 9\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 99 \end{pmatrix}$$

$$dG_{(R,T)} = \Big(3R^2T + 2RT^2 + T^3\Big)\ dR + \Big(R^3 + 2R^2T + 3RT^2\Big)\ dT \qquad dG_{(3,2)} = 86\ dR + 99\ dT$$

Exercice 13 – Dérivée directionnelle
Pour les fonctions suivantes, trouver la dérivée directionnelle dans la direction du vecteur donné :

a) $f(x,y) = y\ln(xy)$ dans la direction de $\vec{v} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

b) $g(x,y,z) = x\,e^{yz}$ dans la direction de $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$.

Corrigé

Pour calculer la dérivée directionnelle d'une fonction suivant la direction d'un vecteur donné, il suffit de d'effectuer le produit scalaire du gradient de la fonction avec le vecteur donné. On a donc :

a) $$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y)\cdot(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ \ln(xy) + y\frac{x}{xy} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ \ln(xy) + 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{y}{x} + 2\ln(xy) + 2$$

b) $$\partial_{\vec{v}} g(x,y) = \vec{\nabla} g(x,y)\cdot(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}) = \begin{pmatrix} e^{yz} \\ xz\,e^{yz} \\ xy\,e^{yz} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1 - 2xz + 3xy)e^{yz}$$

Exercice 14 – Dérivée directionnelle
Un randonneur se promène sur une montagne qui ressemble au graphe de la fonction $f(x,y) = xy^2$, dans un voisinage du point $(2,1)$. Il arrive au point $(2,1,2) = (2,1,f(2,1))$ de la montagne depuis la direction $\vec{d} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, et là demarrent trois chemins de direction

$$\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}, \quad \vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \vec{\jmath} - \vec{\imath}.$$

a) Quel chemin doit-il prendre pour <u>monter</u> la pente le plus <u>doucement</u> possible ?

b) Quelle est la direction où il faudrait réaliser un nouveau chemin qui <u>monterait</u> la pente le plus <u>rapidement</u> possible ?

c) Au retour, en passant par le même point, quel chemin doit-il prendre, parmi les quatre existant, pour <u>descendre</u> la pente le plus <u>rapidement</u> possible ?

Corrigé

Pour resoudre cet exercice il faut utiliser la signification des dérivées directionnelles de f, analogue à celle de la dérivée d'une fonction d'une seule variable : la dérivée $\partial_{\vec{v}} f(x, y)$ indique la croissance de la fonction f au point (x, y) dans la direction $\vec{v}$. Attention : si $\vec{v}$ n'est pas un vecteur de norme 1, la "direction" de $\vec{v}$ est donnée par le vecteur unitaire $\vec{v}/||\vec{v}||$.
Il faut aussi savoir que le gradient de f en (x, y) indique la direction de plus forte croissance de f en (x, y).

a) Pour monter le plus doucement possible il faut choisir le chemin dans la direction qui donne la dérivée directionnelle de f au point $(2, 1)$ qui soit positive et plus petite possible.
Puisque les vecteurs indiqués ne sont pas unitaires, calculons les vecteurs unitaires associés :

$$\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} = (1, -2) \quad \Longrightarrow \quad \vec{U} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4}}\,(1, -2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(1, -2),$$
$$\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} = (1, 1) \quad \Longrightarrow \quad \vec{V} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}\,(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1, 1),$$
$$\vec{w} = \vec{\jmath} - \vec{\imath} = (-1, 1) \quad \Longrightarrow \quad \vec{W} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}\,(-1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1, 1).$$

Pour calculer les dérivées directionnelles on utilise le gradient de f en $(2, 1)$:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \vec{\nabla} f(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Les dérivées directionnelles de f dans les directions de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, au point $(2, 1)$, sont donc

$$\partial_{\vec{U}} f(2, 1) = \vec{\nabla} f(2, 1) \cdot \vec{U} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(1 - 8) = -\frac{7}{\sqrt{5}},$$
$$\partial_{\vec{V}} f(2, 1) = \vec{\nabla} f(2, 1) \cdot \vec{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1 + 4) = \frac{5}{\sqrt{2}},$$
$$\partial_{\vec{W}} f(2, 1) = \vec{\nabla} f(2, 1) \cdot \vec{W} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1 + 4) = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

La direction de plus douce croissance est donc celle de $\vec{w}$.

b) La direction de plus forte croissance en $(2, 1)$ est celle de $\vec{\nabla} f(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

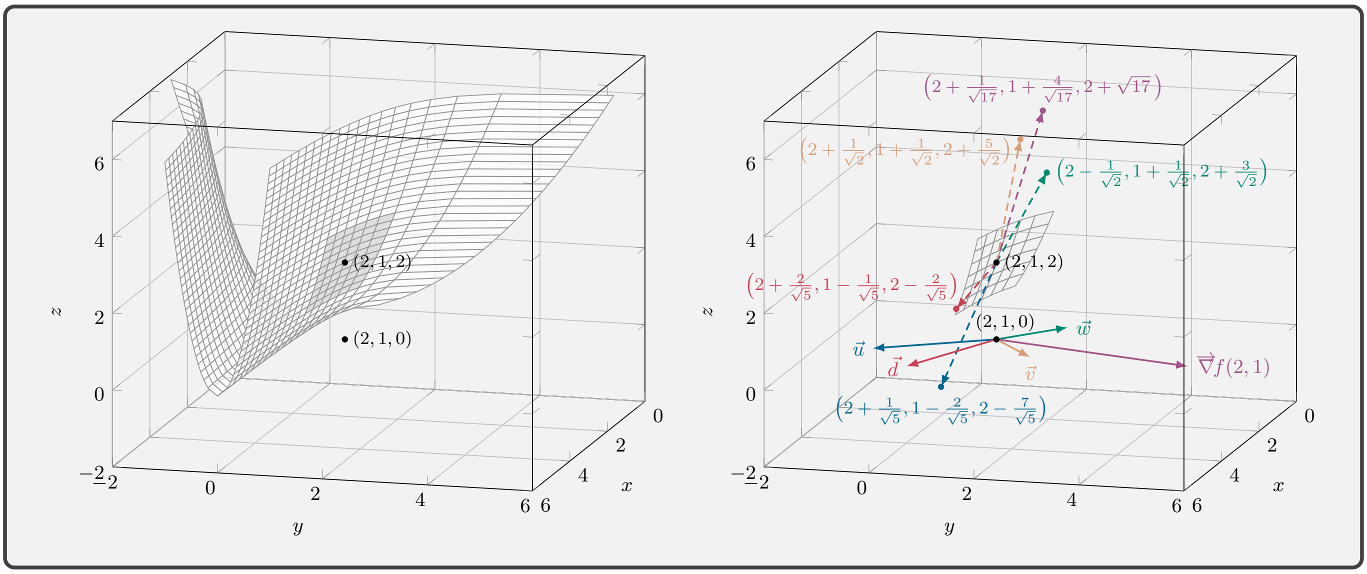
c) Pour descendre le plus rapidement possible il faut choisir le chemin dans la direction qui donne la dérivée directionnelle de f au point $(2, 1)$ qui soit négative et plus grande possible en valeur absolue.
On a

$$\vec{d} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} = (2, -1) \quad \Longrightarrow \quad \vec{D} = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4}}\,(2, -1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2, -1),$$

donc

$$\partial_{\vec{D}} f(2, 1) = \vec{\nabla} f(2, 1) \cdot \vec{D} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2 - 4) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

La direction de plus forte descente est donc celle de $\vec{u}$.



Exercice 15 – Matrice Jacobienne des fonctions vectorielles

Pour les fonctions vectorielles suivantes, calculer la matrice Jacobienne et, si possible, le déterminant Jacobien en tout point, et puis au point indiqué :

a) $g(u,v) = \left(uv^2, \frac{1}{u+v-1}\right)$ en $(1,1)$

b) $h(x,y,z) = \left(x^2(y+1), xz^2, y+1\right)$ en $(1,0,1)$

c) $\phi(p,q) = \left(\ln(p^2q^2), \ln(p-q+1)\right)$ en $(1,1)$

d) $u(\omega,t) = \left(e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t\right)$ en $(\pi,1)$

e) $F(r,\theta,\varphi) = \left(r\cos\varphi, r\sin\theta\right)$ en $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

Corrigé

a) $g(u,v) = \begin{pmatrix} uv^2 \\ \frac{1}{u+v-1} \end{pmatrix} \implies J_g(u,v) = \begin{pmatrix} v^2 & 2uv \\ -\frac{1}{(u+v-1)^2} & -\frac{1}{(u+v-1)^2} \end{pmatrix} \quad J_g(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\det J_g(u,v) = -\frac{v^2}{(u+v-1)^2} + \frac{2uv}{(u+v-1)^2} = \frac{2uv - v^2}{(u+v-1)^2} \qquad \det J_g(1,1) = 1$

b) $h(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2(y+1) \\ xz^2 \\ y+1 \end{pmatrix} \implies J_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x(y+1) & x^2 & 0 \\ z^2 & 0 & 2xz \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_h(1,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det J_h(x,y,z) = -4x^2(y+1)z \qquad \det J_h(1,0,1) = -4$

c) $\phi(p,q) = \begin{pmatrix} \ln(p^2q^2) \\ \ln(p-q+1) \end{pmatrix} \implies J_\phi(p,q) = \begin{pmatrix} \frac{2}{p} & \frac{2}{q} \\ \frac{1}{p-q+1} & -\frac{1}{p-q+1} \end{pmatrix} \quad J_\phi(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det J_\phi(p,q) = -\frac{2}{p(p-q+1)} - \frac{2}{q(p-q+1)} = -\frac{2(p+q)}{pq(p-q+1)} \qquad \det J_\phi(1,1) = -4$$

d) $$u(\omega,t) = \begin{pmatrix} e^{\omega t} \\ \sin(\omega t) \\ \omega t \end{pmatrix} \implies J_u(\omega,t) = \begin{pmatrix} te^{\omega t} & \omega e^{\omega t} \\ t\cos(\omega t) & \omega\cos(\omega t) \\ t & \omega \end{pmatrix} \qquad J_u(\pi,1) = \begin{pmatrix} e^{\pi} & \pi e^{\pi} \\ -1 & -\pi \\ 1 & \pi \end{pmatrix}$$

e) $$F(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \implies J_F(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_F(\sqrt{2},\pi/4,\pi/4) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & 0 & -\sqrt{2}\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \sqrt{2}\cos(\pi/4) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$