TD 6 – EXTREMA LOCAUX

Exercice 31 – Rappel : extrema locaux de fonctions d'une variable réelle
Pour la fonction réelle

$$f(x) = \ln(2 - 2x^2 + x^4),$$

trouver le domaine de définition et les points critiques. Ensuite déteminer le signe de f'' dans les points critiques : la fonction admet-elle des extrema locaux ?

Corrigé

$x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1 \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; par conséquent, le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$. (Une autre manière d'argumenter consiste en montrer que $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$: en introduisant $u = x^2$, on obtient l'équation $u^2 - 2u + 2 = 0$, dont la discriminante $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$ est négative. Étant donné que $0^4 - 2 \cdot 0^2 + 2 > 0$, on peut en conclure que $x^4 - 2x^2 + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

La première dérviée de f est

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 2} = \frac{4x(x+1)(x-1)}{x^4 - 2x^2 + 2} \quad ,$$

ce qui donne trois points critiques, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$.

La deuxième dérivée de f est

$$f''(x) = \frac{(12x^2 - 4)(x^4 - 2x^2 + 2) - (4x^3 - 4x)^2}{(x^4 - 2x^2 + 2)^2} = \frac{4(-x^6 + x^4 + 4x^2 - 2)}{(x^4 - 2x^2 + 2)^2} \quad .$$

Pour $x_0 = 0$ on a $f''(0) = -2 < 0$ (maximum local), pour $x_1 = 1$ on a $f''(1) = 8 > 0$ (minimum local) et pour $x_2 = -1$ on a $f''(-1) = 8 > 0$ (minimum local).

Exercice 32 – Points critiques et extrema
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver et étudier les points critiques. La fonction admet-elle des extrema locaux ?

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$
b) $g(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$
c) $h(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$
d) $F(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^3$
e) $G(x, y) = \ln(2 + x^2 - 2xy + 6y^2)$
f) $H(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 - 2x + 2y^2}$

Corrigé

a) Cherchons les points critiques de la fonction $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$, de domaine $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y + 2 \\ x + 2y + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = -2x - 2 \\ -3x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1/3 \\ y = -4/3 \end{cases} .$$

La fonction f a donc un seul point critique $(-1/3, -4/3)$. Est-il un extremum local ?

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \det H_f(-1/3,-4/3) = 4 - 1 = 3 > 0.$$

donc le point critique est un extremum local.
Puisque $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1/3, -4/3) = 2 > 0$, il s'agit d'un minimum local.

b) Cherchons les points critiques de la fonction $g(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$, de domaine $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-y) + 3(x+y)^2 \\ -2(x-y) + 3(x+y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2(x-y) = 3(x+y)^2 \\ 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

La fonction g a donc un seul point critique $(0,0)$. Est-il un extremum local ?

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + 6(x+y) & -2 + 6(x+y) \\ -2 + 6(x+y) & 2 + 6(x+y) \end{pmatrix} \qquad \det H_g(0,0) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

donc le point critique est un point plat, nous ne pouvons pas dire quelle est sa nature avec seulement des dérivées secondes.

c) Cherchons les points critiques de la fonction $h(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$, de domaine $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y \\ 3y^2 + 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = -x^2 \\ x(x^3 + 1) = 0 \end{cases}$$

Il y a deux solutions : la première est $x = 0$ et $y = 0$, la deuxième est $x^3 = -1$, c'est-à-dire $x = -1$, et $y = -(-1)^2 = -1$.
Au final, il y a donc deux points critiques pour h : $(0,0)$ et $(-1,-1)$. Sont-ils des extrema locaux ?

$$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \det H_h(x,y) = 36xy - 9 = 9(4xy - 1).$$

Puisque $\det H_h(0,0) = -9 < 0$, le point $(0,0)$ est un point col.
Puisque $\det H_h(-1,-1) = 9(4-1) = 27 > 0$, le point $(-1,-1)$ est un extremum local, et comme $\dfrac{\partial h}{\partial x}(-1,-1) = -6 < 0$, il s'agit d'un maximum local.

d) Cherchons les points critiques de la fonction $F(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3$, de domaine $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{\nabla} F(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 3(x-y)^2 \\ 4y^3 + 3(x-y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x^3 = 3(x-y)^2 \\ 4(y^3 + x^3) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -x \\ 4x^3 = 12x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ 4x^2(x-3) = 0 \end{cases}$$

Il y a deux solutions : la première est $x = 0$ et $y = 0$, la deuxième est $x = 3$ et $y = 3$.

Au final, il y a donc deux points critiques pour F : $(0,0)$ et $(3,3)$. Sont-ils des extrema locaux ?

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 6(x-y) & 6(x-y) \\ 6(x-y) & 12y^2 - 6(x-y) \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 2x^2 - (x-y) & (x-y) \\ (x-y) & 2y^2 - (x-y) \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det H_F(0,0) = 36 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, le point $(0,0)$ est un point plat. $2 \cdot 3^2 - (3+3)$

Puisque $\det H_F(3,3) = 36 \det \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 36 \cdot (\cancel{12})^2$ 3 > 0, le point $(3,3)$ est un extremum local, et comme $\frac{\partial F}{\partial x}(3,3) = 6 \cdot 12 > 0$, il s'agit d'un minimum local.

e) Le domaine de définition de $G(x,y) = \ln(2+x^2-2xy+6y^2)$ est $D_G = \mathbb{R}^2$ parce que $2+x^2-2xy+6y^2 = (x-y)^2 + 5y^2 + 2 > 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Points critiques :

$$\vec{\nabla} G(x,y) = \frac{2}{(x-y)^2 + 5y^2 + 2} \begin{pmatrix} x-y \\ 6y - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x \\ 5x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ un seul point critique : $(0,0)$

$$H_G(x,y) = \frac{2}{\big((x-y)^2 + 5y^2 + 2\big)^2} \begin{pmatrix} 4y^2 + 2xy - x^2 + 2 & 6y^2 - 12xy + x^2 - 2 \\ 6y^2 - 12xy + x^2 - 2 & -4(9y^2 - 3xy - x^2 - 3) \end{pmatrix}$$

$\det H_G(0,0) = (\frac{1}{2})^2 \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 12 \end{pmatrix} = 5 > 0$, extremum local ; $\frac{\partial G}{\partial x}(0,0) = 1 > 0$, minimum local.

f) Le domaine de définition de $H(x,y) = \big(1 + x^2 - 2x + 2y^2\big)^{-1}$ est $D_H = \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\}$ parce qu'il faut que $1 + x^2 - 2x + 2y^2 = (x-1)^2 + 2y^2 \neq 0$. Points critiques :

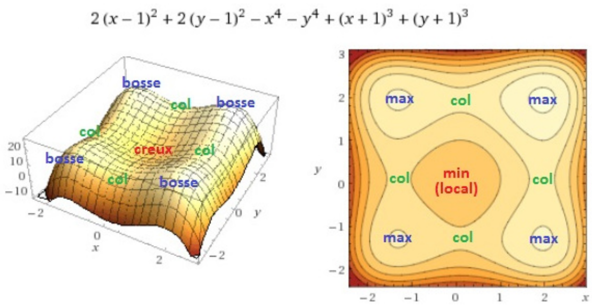
$$\vec{\nabla} H(x,y) = \frac{2}{\big((x-1)^2 + 2y^2\big)^2} \begin{pmatrix} 1-x \\ -2y \end{pmatrix} \qquad \text{donc } \vec{\nabla} H(x,y) \neq \vec{0} \text{ pour tout } (x,y) \in D_H$$

$\Rightarrow$ $H(x,y)$ n'a pas de point critique.

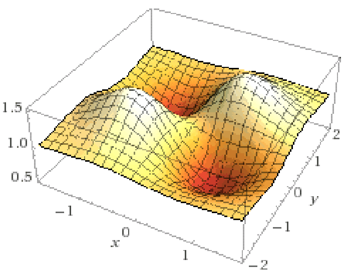
Exercice 33 – Points critiques et extrema

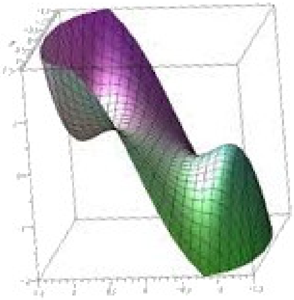
Pour les fonctions representées par les graphes suivantes, indiquer tous les points critiques et les extrema locaux :

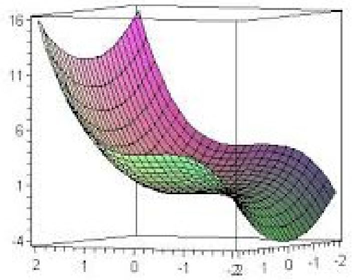
a)

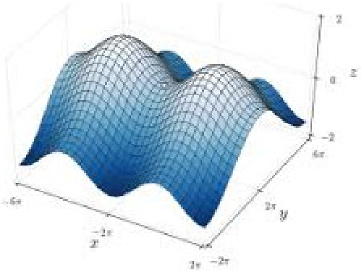


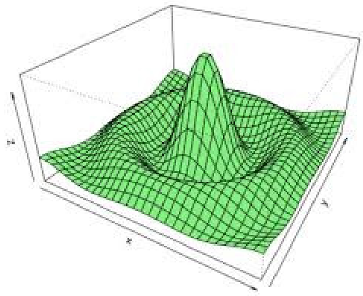
b)



c) 

e) 

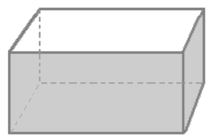
d) 

f) 

Corrigé
a) 4 maxima locaux, 1 minimum local, 4 points col
b) 2 maxima locaux, 2 minima locaux, 1 point col
c) 1 maximum local, 1 minimum local, 2 points col
d) 2 maxima locaux, 1 point col
e) 1 point plat ou une ligne de points plats (difficile à voir étant donné l'échelle de la figure)
f) 1 maximum local, 2 cercles de points plats

Exercice 34 – Application des extrema : optimisation

On veut construire une boite en forme de parallélépipède rectangle (ouverte en haut) de volume $4\,m^3$, avec base et faces d'aire totale minimale.
Quelles dimensions doit-on prendre pour la boite ?



Corrigé

Appellons x, y et z les trois dimensions de la boite, avec z la hauteur. Donc $x, y, z \in \mathbb{R}$ et $x, y, z > 0$.
Le volume de la boite est alors $xyz = 4\,m^3$.
L'aire totale des surfaces qui composent le bord de la boite (exclus le couvercle) est la somme des aires suivantes :

$$\text{base : } xy, \quad \text{face avant : } xz, \quad \text{face arrière : } xz, \quad \text{face gauche : } yz, \quad \text{face droite : } yz,$$

soit une aire totale $xy + 2xz + 2yz$, que l'on veut rendre minimale. Cherchons donc les minima locaux de la fonction $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sous la contrainte $xyz = 4$.
La contrainte $xyz = 4$ donne $z = \dfrac{4}{xy}$. Il suffit donc de chercher les minima locaux de la fonction

$$g(x, y) = f(x, y, z)\big|_{xyz=4} = xy + \frac{8x}{xy} + \frac{8y}{xy} = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}, \qquad \text{avec } x, y > 0.$$

On a

$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} y - \dfrac{8}{x^2} \\ x - \dfrac{8}{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{8}{x^2} \\ xy^2 - 8 = x\,\dfrac{64}{x^4} - 8 = 8\dfrac{8-x^3}{x^3} = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{8}{x^2} \\ x^3 = 8 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases}.$$

La fonction g a donc un point critique $(2,2)$. Vérifions que c'est un minimum local.

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{16}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{16}{y^3} \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} \det H_g(2,2) = \left(\dfrac{16}{8}\right)^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3 > 0 \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(2,2) = \dfrac{16}{8} = 2 > 0 \end{cases}$$

donc le point $(2,2)$ est bien un minimum local de g.
Conclusion : pour avoir une boite de volume égal à $4m^3$ et aire totale de la base et des parois minimale, il suffit de prendre les dimensions

$$\text{base :} \quad x = 2m \quad \text{et} \quad y = 2m, \qquad \text{hauteur :} \quad z = \frac{4m^3}{4m^2} = 1m.$$