Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2A**
Automne 2023 **Nadège JACQUEMOT**

Révisions CC3 Maths 2A

Ces exercices viennent en complément des DM déposés sur TOMUSS et qu'il est fortement conseillé de faire.

Exercice 1 – Points critiques

Pour chacune des fonctions f et g :

1. Déterminer tous les points critiques.
2. Trouver la nature de chacun des points critiques.

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy + 1$ b) $g(x,y) = x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2$ c) $h(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$

Corrigé

a) 1. $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -2y+x \end{pmatrix}$. Ainsi, $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ -2y+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y=0 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

Donc f admet un unique point critique $(0,0)$.

2. La matrice Hessienne de f est $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\operatorname{Hess} f(x,y) = -5$ et en particulier, $\operatorname{Hess} f(0,0) = -5$ donc $(0,0)$ est un point col.

b) 1. $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 1-x^2-y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$. Ainsi, $\vec{\nabla} g(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2-y^2=0 \\ -2xy=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-y^2=0 \\ x=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 1-x^2=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

Donc les points critiques de g sont $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.

2. La matrice Hessienne de g est $H_g(x,y) = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$. Ainsi, $\operatorname{Hess} g(x,y) = 4x^2 - 4y^2$.

- $\operatorname{Hess} g(0,1) = -4$: le point critique $(0,1)$ est un point col (ou point selle).
- $\operatorname{Hess} g(0,-1) = -4$: le point critique $(0,-1)$ est un point col (ou point selle).
- $\operatorname{Hess} g(1,0) = 4$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,0) = -2 < 0$: le point critique $(1,0)$ est un maximum local.
- $\operatorname{Hess} g(-1,0) = 4$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(-1,0) = 2 > 0$: le point critique $(-1,0)$ est un minimum local.

c) 1. $\vec{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 8(x-y) \\ 4y^3 + 8(x-y) \end{pmatrix}$. Ainsi, $\vec{\nabla} h(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 8(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 8(x-y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 8(x-y) = 0 \\ 4x^3 + 4y^3 = 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 16x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-4) = 0 \\ y = -x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$

Donc les points critiques de h sont $(0,0)$, $(2,-2)$ et $(-2,2)$.

2. La matrice Hessienne de h est $H_h(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-8 & 8 \\ 8 & 12y^2-8 \end{pmatrix}$.

- $H_h(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$ d'où $\operatorname{Hess} h(0,0) = 0$: le point critique $(0,0)$ est un point plat.
- $H_h(-2,2) = \begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 8 & 40 \end{pmatrix}$ d'où $\operatorname{Hess} h(-2,2) > 0$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(-2,2) = 40 > 0$: le point critique $(-2,2)$ est un minimum local.
- $H_h(2,-2) = \begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 8 & 40 \end{pmatrix}$ d'où $\operatorname{Hess} h(2,-2) > 0$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(2,-2) = 40 > 0$: le point critique $(2,-2)$ est un minimum local.

Exercice 2 – Intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

a) $I_1 = \displaystyle\int_{x=2}^{4} \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} (x\cos(y))\, dx\, dy$

b) $I_2 = \displaystyle\iint_D (x+y)\, dx\, dy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \ ;\ x^2 \leqslant y \leqslant x\right\}$

c) $I_3 = \displaystyle\iint_D (x^2+y)\, dx\, dy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \ ; y \geqslant 0 \ ;\ x+y \leqslant 1\right\}$

d) $I_4 = \displaystyle\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz$ où $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2+y^2 \leqslant a^2 \ ;\ 0 \leqslant z \leqslant a \text{ avec } a > 0\right\}$

(Penser aux coordonnées cylindriques)

Corrigé

a)
$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{x=2}^{4} \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} (x\cos(y))\, dx\, dy \\
&= \int_{x=2}^{4} x\, dx \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y))\, dy \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 \times [\sin(y)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) \times \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right) \\
&= 6 \times 1 \\
&= 6
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_D (x+y)\, dx\, dy \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x^2}^{x} (x+y)\, dy\right) dx \\
&= \int_{x=0}^{1} \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{x} dx \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right]_{x=0}^{1} \\
&= \frac{1^3}{2} - \frac{1^4}{4} - \frac{1^5}{10} \\
&= \frac{3}{20}
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
I_4 &= \iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_{\rho=0}^{a} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{a} \frac{z}{\rho}\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \qquad \textit{changement de variables en coordonnées cylindriques} \\
&= \int_{\rho=0}^{a} d\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=0}^{a} z\, dz \\
&= a \times 2\pi \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{a} \\
&= a^3\pi
\end{aligned}$$

c) $I_3 = \iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x} (x^2+y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1-x} dx$$

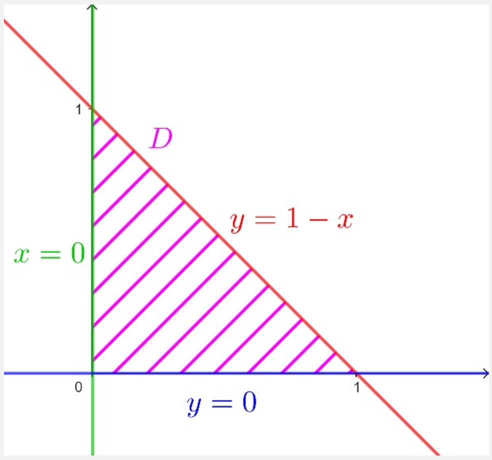
$$= \int_{x=0}^{1} \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(\frac{1}{2} - x + \frac{3}{2}x^2 - x^3 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{2} - \frac{1^4}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$



Exercice 3 – Aire et volume

1. Calculer l'aire de la surface $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\ ;\ x^2 \leqslant y \leqslant 4 - x^3\right\}$
2. Calculer le volume du solide $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2y\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9-z^2}\ ; 0 \leqslant z \leqslant 3\right\}$.

Corrigé

1. L'aire de la surface S est donnée par :

$A(S) = \iint\limits_S dx\,dy$

$$= \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=x^2}^{4-x^3} dy \right) dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1} [y]_{y=x^2}^{4-x^3}\ dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1} 4 - x^3 - x^2\,dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{1}$$

$$= \left(4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - \frac{1}{4} - \frac{-1}{3} \right)$$

$$= \frac{22}{3}$$

2. Le volume du solide Ω est donné par :

$V(\Omega) = \iiint\limits_S dx\,dy\,dz$

$$= \int_{x=0}^{2y} \int_{y=0}^{\sqrt{9-z^2}} \int_{z=0}^{3} dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{z=0}^{3} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{9-z^2}} \int_{x=0}^{2y} dx\,dy \right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{3} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{9-z^2}} 2y\,dy \right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{3} \left[y^2\,dy \right]_{y=0}^{\sqrt{9-z^2}} dz$$

$$= \int_{z=0}^{3} 9 - z^2\,dz$$

$$= \left[9z - \frac{z^3}{3}\,dy \right]_{z=0}^{3}$$

$$= 18$$

Exercice 4 – Centre de masse

1. Déterminer le centre de masse de la surface plane homogène $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\,,\ y \geqslant 0\}$.
2. Déterminer le centre de masse du parallélépipède rectangle $[0,1] \times [0,2] \times [0,3]$ de $\mathbb{R}^3$ ayant pour densité de masse $\mu(x, y, z) = 2xyz$

Corrigé

1. S s'écrit en coordonnées polaires : $\tilde{S} = \{(\rho, \varphi) \mid 1 \leqslant \rho \leqslant 3\,,\ \varphi \in [0, \pi]\}$

• La masse totale de S est :

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \mu(x,y)\,dx\,dy \\ &= \iint_{\tilde{S}} 1\rho\,d\rho\,d\varphi \qquad \mu = 1 \text{ car surface homogène} \\ &= \int_{\rho=1}^{3} \rho\,d\rho \int_{\varphi=0}^{\pi} d\varphi \\ &= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=1}^{3} \times \pi \\ &= \frac{9}{2}\pi \end{aligned}$$

• Le centre de masse $G(x_G, y_G)$ a pour coordoonnées :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M}\iint_S x\mu(x,y)\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{M}\iint_{\tilde{S}} \rho\cos(\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi \\ &= \frac{1}{M}\int_{\rho=1}^{3}\rho^2\,d\rho\int_{\varphi=0}^{\pi}\cos(\varphi)\,d\varphi \\ &= \frac{2}{9\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=1}^{3} \times [\sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M}\iint_S y\mu(x,y)\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{M}\iint_{\tilde{S}} \rho\sin(\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi \\ &= \frac{1}{M}\int_{\rho=1}^{3}\rho^2\,d\rho\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin(\varphi)\,d\varphi \\ &= \frac{2}{9\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=1}^{3} \times [-\cos(\varphi)]_{\varphi=0}^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

Donc $G\left(0, \dfrac{4}{\pi}\right)$.

2. • La masse totale de Ω est :

$$\begin{aligned} M &= \iiint_\Omega \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{3} 2xyz\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_{x=0}^{1} 2x\,dx \int_{y=0}^{2} y\,dy \int_{z=0}^{3} z\,dz \\ &= \left[x^2\right]_{x=0}^{1} \times \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{2} \times \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{3} \\ &= 9 \end{aligned}$$

• Le centre de masse $G(x_G, y_G, z_G)$ a pour coordoonnées :

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{3} 2x^2yz\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_{x=0}^{1} x^2\,dx\int_{y=0}^{2} 2y\,dy\int_{z=0}^{3} z\,dz \\
&= \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1}\times\left[y^2\right]_{y=0}^{2}\times\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{3} 2xy^2z\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_{x=0}^{1} 2x\,dx\int_{y=0}^{2} y^2\,dy\int_{z=0}^{3} z\,dz \\
&= \frac{1}{9}\left[x^2\right]_{x=0}^{1}\times\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{2}\times\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{3} 2xy^2z\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_{x=0}^{1} 2x\,dx\int_{y=0}^{2} y\,dy\int_{z=0}^{3} z^2\,dz \\
&= \frac{1}{9}\left[x^2\right]_{x=0}^{1}\times\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{2}\times\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{3} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Donc $G\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2\right)$.