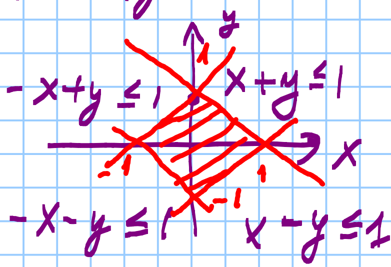
2020 - Math5 - DM1 - corrigé

Exercice 1. On considère l'intégrale double

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Cette intégrale est-ce un nombre positif ou négatif ? Argumenter.

Le domaine : $|x|+|y|\leq 1$ est borné par $|x|+|y|=1$. Par définition $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x\geq 0 \\ -x, & \text{si } x<0 \end{cases}$



Si on regarde la fonction $\ln(x^2+y^2)$ sur le domaine

On remarque que puisque $|x|+|y|\leq 1$ alors $(|x|+|y|)^2\leq 1$ i.e.

$$|x|^2+2|x||y|+|y|^2\leq 1 \Rightarrow x^2+y^2\leq 1-\underbrace{2|x||y|}_{\geq 0}\leq 1$$

Alors $\ln(x^2+y^2)\leq 0$

Le sens géométrique de l'intégrale double est le volume sous le graphe (avec le signe). La fonction étant négative partout sur le domaine donnera l'intégrale <u>négative</u>

<u>Attn</u> : Le calcul de cette intégrale est longue et compliqué. Si le seul argument que l'intégrale est <0 est ce calcul, le calcul doit être <u>correcte</u>

En particulier, le domain n'est pas $\begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ -1\leq y\leq 1 \end{cases}$ - <u>voir le dessin</u>

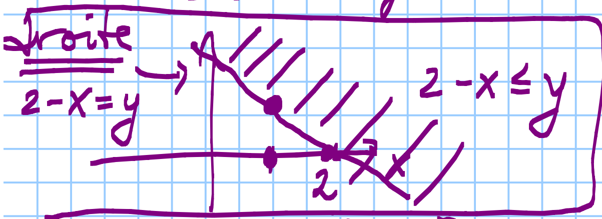
Le domaine on peut décrire comme la somme de deux : $\begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ x-1\leq y\leq 1-x \end{cases}$ et $\begin{cases} -1\leq x\leq 0 \\ -1-x\leq y\leq 1+x \end{cases}$

Exercice 2. Changer l'ordre d'intégration dans les intégralse doubles

$$\textbf{a. } \int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x, \qquad \textbf{b. } \int_0^2 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Dessiner les domains d'intégration et montrer le raisonnement.

a) $\begin{cases} 1 \overset{(1)}{\le} x \overset{(2)}{\le} 2 \\ 2-x \overset{(3)}{\le} y \overset{(4)}{\le} \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$



pour $x=1$ et $x=2$ le y sur $y=\sqrt{2x-x^2}$ est $\sqrt{2x-x^2}\Big|_{x=1}=1$ et $\sqrt{2x-x^2}\Big|_{x=2}=0$

Sur l'intervale $x\in[1,2]$ on étudie les bornes pour y. La droite $2-x=y$ et aussi $y=\sqrt{2x-x^2}$ on étudie la fonction $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ pour $x\in[1,2]$

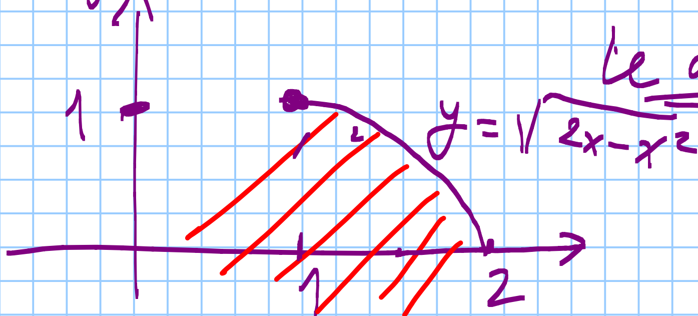
$f'(x)=\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}\right)$

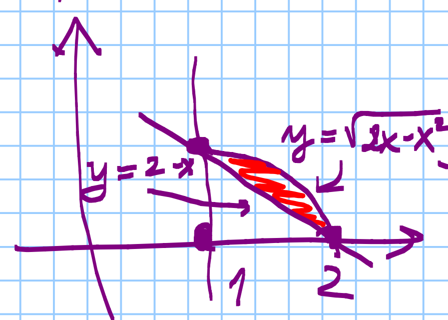
$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}}$, $f'(x)=0$ $\sqrt{2-x}=\sqrt{x}$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ a un max en pt. $x=1$

La fonction décroit sur $[1,+\infty[$

le domain:





On a $0\le y\le 1$

De $2-x\le y$ on a $\boxed{2-y\le x}$

et de $0\le y\le\sqrt{2x-x^2}$ on a $y^2\le 2x-x^2 \Leftrightarrow$

$x^2-2x+y^2\le 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1\le x\le x_2 \Longleftrightarrow 1-\sqrt{1-y^2}\le x\le 1+\sqrt{1-y^2}$

ou $x_1=1-\sqrt{1-y^2}$, $x_2=1+\sqrt{1-y^2}$

et avec $2-y\le x$ on compare $2-y$ et $1-\sqrt{1-y^2}$

sur l'intervalle $y \in [0,1]$ on a

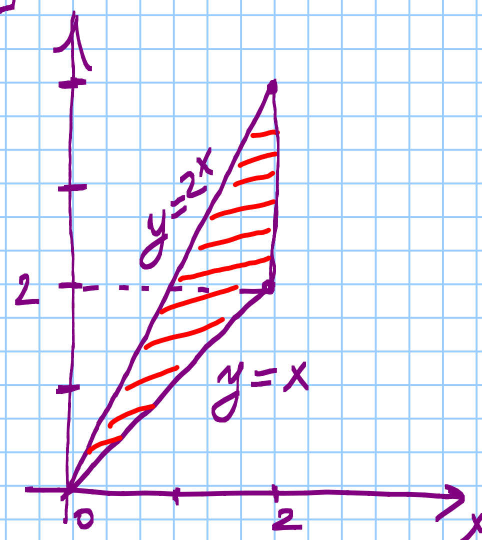
$$1-\sqrt{1-y^2} \leq 1 \leq 2-y$$

$$\begin{cases} 1-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2} \\ 2-y \leq x \end{cases} \iff 2-y \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2}$$

et alors l'intégrale devient

$$\boxed{\int_0^1 \left[\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \right] dy}$$

Exo 26 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x \end{cases}$



On voit que pour

$0 \leq y \leq 2$ on a

$\frac{y}{2} \leq x \leq y$

et pour $2 \leq y \leq 4$ on a

$\frac{y}{2} \leq x \leq 2$

Donc l'intégrale devient la somme :

$$\int_0^2 \left[\int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx \right] dy + \int_2^4 \left[\int_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Exercice 3. Trouver un changement de variables adapté puis calculer l'intégrale double suivante

$$I = \iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1} \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Le domaine est l'intérieur d'une ellipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. On change les variables :

$$\begin{cases} x = 2r\cos t \\ y = 3r\sin t \end{cases} \quad \text{alors} \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = r^2$$

$t \in [0, 2\pi]$ et $r \in [0, 1]$

Jacobien :

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(r,t)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos t & -2r\sin t \\ 3\sin t & 3r\cos t \end{vmatrix} = 6r$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cdot 6r\,dr\,dt = 2\pi\cdot 6\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{4\pi}$$

Exercice 4. Calculer l'intégrale triple suivante :

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} (-2xy+2z)\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[-2xyz + \frac{2z^2}{2} \right]_0^{x+y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(-2xy(x+y) + (x+y)^2 \right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(-2x^2y - 2xy^2 + x^2 + 2xy + y^2 \right) dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} [1-2x]\, y^2 + [2x-2x^2]\, y + x^2\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[(1-2x)\frac{y^3}{3} + (2x-2x^2)\frac{y^2}{2} + x^2\frac{y}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left((1-2x)\, \frac{(1-x)^3}{3} + x(1-x)^3 + x^2(1-x) \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1+x}{3}(1-x)^3 + x^2 - x^3\, dx = \int_0^1 \left(\frac{(1-x^2)(1-2x+x^2)}{3} + x^2 - x^3 \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 1 - 2x + x^2 - x^2 + 2x^3 - x^4 + 3x^2 - 3x^3\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(1 - 2x + 3x^2 - x^3 - x^4 \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[x - \frac{2x^2}{2} + \frac{3x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{11}{60}}$$