Devoir Maison n° 2

A rendre le 24 novembre sur tomuss avant 23h00 en format **pdf** !

Exercice 1. Cycloïde
Le but de cette exercice est d'étudier une cycloïde. La cycloïde est une courbe qui décrit le trajectoire d'un point fixé à un cercle de rayon R qui roule sans glisser sur une droite (le chewing-gum collé sur le pneu d'une roue de vélo décrit une cycloïde).
On concidère une paramétrisation d'un arc d'une cycloïde C suivante

$$x = R(t - \sin t),\ y = R(1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$$

1. Calculer les valeurs $(x, y)(t)$ des points de la cycloïde C pour les valeurs de t suivantes :

$$t_1 = \pi/3, t_2 = \pi/2, t_3 = \pi, t_4 = 3\pi/2$$

   et les dessiner sur le plan xy.
2. Dessiner les vecteurs tangents $(x', y')(t)$ dans ces quatre points.
3. Trouver les équations des droites tangentes dans ces quatre points.
4. Calculer la longueur de la cycloïde C.
5. Calculer l'intégrale curviligne sur la cycloïde C :

$$\int_C (2R - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

6. On remarque que entre $t = 0$ et $t = 2\pi$, la variable x parcours de 0 à $2\pi R$. Alors l'aire sous l'arc de la cycloïde :

$$\int_0^{2\pi R} y\mathrm{d}x$$

   Calculer la.

Exercice 2.
Calculer l'intgrale curviligne sur un circuit fermé $ABCDA$:

$$\oint_{ABCDA} \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{|x| + |y|}$$

où $ABCDA$ est le périmetre du carré des sommets $A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1)$.

Exercice 3. Le potentiel d'un champs
Si le champs $V(x, y) = (P, Q)(x, y)$ est un champs de gradient de la fonction $f(x, y)$, la fonction f est appelée le potentiel de V. Soit

$$P(x, y) = x^4 + 4xy^3 \text{ et } Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4.$$

Vérifier la condition necessaire pour que V soit un champs de gradient et trouver son potentiel.