CF. Math5 - 2020. Partie I

Question Partie I.

(1.5 pts) On considère une courbe donnée par

$$\begin{cases} y = & -3x \\ z = & 2x^2 \end{cases}$$

Trouver les équations de la tangente et du plan normal au point $(1, -3, 2)$.

paramétrisation

$$t \mapsto \begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = 2t^2 \end{cases}$$

le pt. $(1,-3,2)$ correspond à $t=1$

On a $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = -3 \\ z' = 4t \end{cases}$ en $t=1$ cela donne le vecteur $(1,-3,4)$ - c'est un vect. directeur de la droite tangente dont l'éqn. est : $\dfrac{x - x(1)}{x'(1)} = \dfrac{y-y(1)}{y'(1)} = \dfrac{z-z(1)}{z'(1)}$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-(-3)}{-3} = \frac{z-2}{4} \text{ ou bien } \boxed{x-1 = -\frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{4}}$$

Le plan normal passe par le pt. $(1,-3,2)$ et ce plan est orthogonal au vecteur directeur de la droite tangente ce qui donne l'éqn du plan :

$$1\cdot x + (-3)\cdot y + 4z = 1\cdot 1 + (-3)\cdot(-3) + 4\cdot 2 \iff \boxed{x - 3y + 4z - 18 = 0}$$

Exercice Partie I.

Soit $\mathcal{P}$ le domaine dans $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes $x = y^2 + 2y + 1$ et $y = -x + 1$ et soit $\mathcal{C}$ le circuit donné par le bord de $\mathcal{P}$ parcouru dans le sens directe trigonométrique.
On note γ_1 la partie du circuit $\mathcal{C}$ qui suit la courbe $x = y^2 + 2y + 1$ et γ_2 la partie du circuit $\mathcal{C}$ qui suit la courbe $y = -x + 1$

1. (0.5 pt) Déterminer les points d'intersection de deux courbes.
2. (1 pt) Dessiner le domaine $\mathcal{P}$.
3. (2 pts) Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.
4. (1 pt) Écrire une paramétrisation $[0, 1] \to \gamma_2$ telle que pour $t \in [0, 1]$ on a

$$\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x = f(t), \ y = g(t) \text{ où } t \in [0, 1]\},$$

   $f(t)$ et $g(t)$ - deux fonctions réelles.
   Indication. On remarque que $(f(0), g(0)) = (4, -3)$ et $(f(1), g(1)) = (1, 0)$.

5. Calculer l'integral curviligne $\oint_{\mathcal{C}} y^2 dx$ par deux méthodes :
   (a) (2 pts) Directement sur $\mathcal{C}$
   (b) (2 pts) En utilisant la formule de Green-Riemann

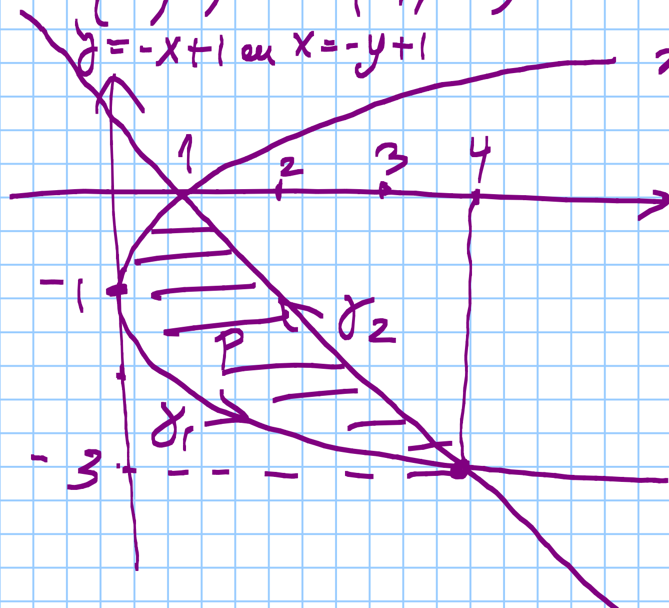
1) $\begin{cases} x = y^2+2y+1 \\ y = -x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^2+2y+1 = (y+1)^2 \\ x = -y+1 \end{cases}$

$\Rightarrow y^2+2y+1 = -y+1 \Rightarrow y^2+3y = 0$

Pts d'intersections : ont pour y : $y=0$, $y=-3$

Donc $(0,1)$ et $(4,-3)$

2)



$x = y^2+2y+1$

3) $\text{aire}\,P = \iint_P dx\,dy$

$= \int_{-3}^{0} \int_{y^2+2y+1}^{-y+1} dx\,dy$

$= \int_{-3}^{0} (-y+1-y^2-2y-1)\,dy = \left[-\frac{y^3}{3} - 3\frac{y^2}{2}\right]_{-3}^{0}$

$= -\left(\frac{(-3)^3}{3} - \frac{3}{2}(-3)^2\right) = -\left(3^2 - \frac{3^3}{2}\right) = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2} = \boxed{4,5}$

4) $[0,1] \rightarrow \gamma_2$

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ passant par $(4,-3) \rightarrow (1,0)$

donc en $t=0$ $x=4$, $y=-3$

$\Rightarrow \begin{cases} x = ?\cdot t + 4 \\ y = ??\cdot t - 3 \end{cases}$ et on trouve ? et ?? en mettant $t=1$ et $x=1$ et $y=0$

$\boxed{\begin{cases} x = -3t+4 \\ y = 3t-3 \end{cases}}$

5) $\int_C y^2dx = \int_{\gamma_1} y^2dx + \int_{\gamma_2} y^2dx$

Sur γ_1 : on a $x = y^2+2y+1$ et $y \in [0,-3]$

Donc on a la paramétrisation avec y $\begin{cases} x = y^2+2y+1 \\ y = y \end{cases}$

$dx = (2y+2)dy$

$$\int_0^{-3} y^2(2y+2)\,dy = \left[\frac{2y^4}{4} + \frac{2y^3}{3}\right]_0^{-3} = \left(\frac{(-3)^4}{2} + 2\frac{(-3)^3}{3}\right) = \frac{81}{2} - 18$$

Pour γ_2 on peut prendre la paramétrisation de 4) ou bien directement $\begin{cases} x = x \\ y = -x+1 \end{cases}$ $\quad x : 4 \to \underline{1}$

alors $$\int_{\gamma_2} y^2 dx = \int_4^1 (-x+1)^2 dx = \int_4^1 (x^2-2x+1)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x\right]_4^1 = \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - \left(\frac{4^3}{3} - 4^2 + 4\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{64}{3} + 16 - 4 = -21 + 16 - 4 = -9$$

$$\oint_C y^2 dx = \frac{81}{2} - 18 - 9 = \frac{81-54}{2} = \frac{27}{2} = \boxed{13{,}5}$$

6) <u>Green-Riemann</u>

$$\oint_C y^2 dx = -\iint_D \frac{\partial (y^2)}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{-3}^{0}\int_{y^2+2y+1}^{-y+1} 2y\,dx\,dy$$

$$= -\int_{-3}^{0} 2y\left[-y+1-y^2-2y-1\right] dy = 2\int_{-3}^{0} (y^3+3y^2)\,dy$$

$$= 2\left[\frac{y^4}{4} + 3\frac{y^3}{3}\right]_{-3}^{0} = 0 - 2\left[\frac{3^4}{4} + (-3)^3\right] = -\frac{81}{2} + 54 = \frac{27}{2} = \boxed{13{,}5}$$