Questions Partie II. CF-Math5-2020-Partie II

1. (1 pt) Calculer le champ de gradient de la fonction

$$F(x,y) = x^{\cos(y^2x+2x+1)}$$

$$= e^{\ln x \cdot \cos(y^2x+2x+1)}$$

dans le domaine $x > 0,\ y \in \mathbb{R}$.
Montrer le calcul. Une reponse sans calcul vaut 0 points.

2. (1 pt) Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(2x)\,dx$$

Montrer le calcul. Une reponse sans calcul vaut 0 points.

1. grad F

$$= \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

où

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial e^{(\ln x)(\cos(y^2x+2x+1))}}{\partial x}$$

$$= x^{\cos(y^2x+2x+1)}\left(\ln x(-\sin(y^2x+2x+1))\cdot(y^2+2) + \frac{\cos(y^2x+2x+1)}{x}\right)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^{\cos(y^2x+2x+1)}(-\sin(y^2x+2x+1))\cdot 2yx\ln x$$

2.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$\sin^2(2x) = \frac{1-\cos 4x}{2}, \quad \int \sin 4x\,dx = \int \sin u \cdot \frac{du}{4}$$

$$u = 4x, \quad du = 4dx, \quad dx = \frac{du}{4}$$

Exercice Partie II.

On considère une partie de l'espace $\mathcal{V}$ délimité par la sphère unitaire de l'équation

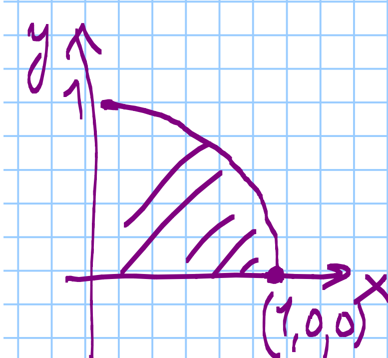
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ainsi que par les inégalités $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Soit $\mathcal{S}$ le bord de $\mathcal{V}$ oriente selon la normale exterieure. Cette surface $\mathcal{S}$ est une reunion de la partie sphérique notée $\mathcal{S}_s$, et des parties dans les plans d'équations $x = 0,\ y = 0$ et $z = 0$ noté $\mathcal{S}_x,\ \mathcal{S}_y$ et $\mathcal{S}_z$.

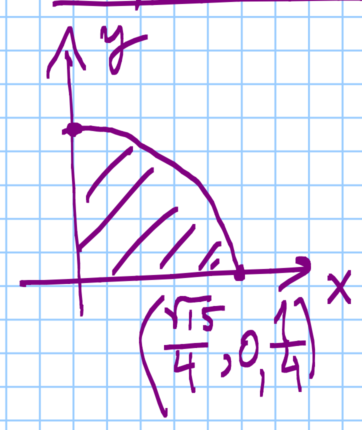
On note **U** le champ de vecteurs $(x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.

1. (0.5 pt) Faire un dessin de $\mathcal{S}_z$ en notant les coordonnées du plan dans lequel se trouve $\mathcal{S}_z$.
2. (1 pt) Faire un dessin dans le plan d'équation $z = \frac{1}{4}$ de son intersection avec $\mathcal{V}$. Écrire les coordonnées du point avec x maximal.
3. Calculer le flux de **U** à travers $\mathcal{S}$. Pour cela :
   (a) (2 pts) Calculer le flux de **U** à travers $\mathcal{S}_s$.
   (b) (1 pt) En explicitant le champ de vecteurs **U** dans le plan $z = 0$ écrire la valeur du flux de **U** à travers $\mathcal{S}_z$.
   (c) (1 pt) Conclure.
4. (2.5 pts) Appliquer le théorème d'Ostrogradsky-Gauss pour le calcul d'une intégrale triple pour retrouver le même resultat.
   Vous pouvez utiliser les formules de passage en coordonnées sphèriques sans démonstration.

1) le plan $z=0$



2) le plan $z=\frac{1}{4}$



$$z = \frac{1}{4}, \quad x^2 + y^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \quad \text{si } y = 0$$

alors $x = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ - max.

3a) On remarque que le vecteur (x,y,z) est normale à la surface de la sphère unitaire au pt (x,y,z). En plus comme $x^2+y^2+z^2=1$ c'est une normale unitaire. Donc

$$I_{S_s} = \iint_{S_s} \vec{u}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_{S_s} x^4+y^4+z^4\,ds$$

en coord. sphérique cela donne

$$\begin{cases} x = 1\cdot\cos\varphi\sin\theta & \theta\in[0,\frac{\pi}{2}] \leftarrow \text{car } x,y,z>0 \\ y = 1\cdot\sin\varphi\sin\theta & \varphi\in[0,\pi/2] \swarrow \\ z = 1\cdot\cos\theta \end{cases}$$

$$I_{S_s} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(\cos^4\varphi\sin^4\theta + \sin^4\varphi\sin^4\theta + \cos^4\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

On utilise la formule générale

$$\int\cos^k\theta\sin\theta\,d\theta \underset{\substack{u=\cos\theta\\ du=-\sin\theta\,d\theta}}{=} -\frac{\cos^{k+1}\theta}{k+1}$$

et aussi $\sin^4\theta = (1-\cos^2\theta)^2 = 1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta$

$$I_{S_s} = \int_0^{\pi/2}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)\,d\varphi\int_0^{\pi/2}(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$+\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)\,d\varphi\left[-\cos\theta+\frac{2}{3}\cos\theta-\frac{\cos^5\theta}{5}\right]_0^{\pi/2}+\frac{\pi}{2}\cdot\left[-\frac{\cos^5\theta}{5}\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)\,d\varphi\cdot\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{\pi}{10}$$

$$=\left[\frac{\sin4\varphi}{32}-\frac{\sin2\varphi}{4}+\frac{3}{8}\varphi+\frac{\sin4\varphi}{32}+\frac{\sin2\varphi}{4}+\frac{3}{8}\varphi\right]_0^{\pi/2}\cdot\frac{8}{15}+\frac{\pi}{10}$$

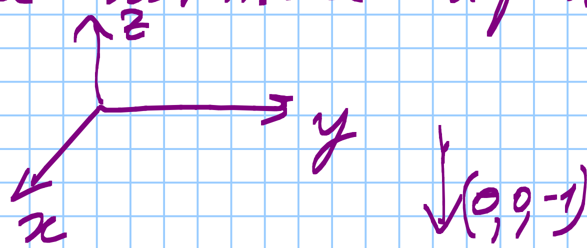
$$=\frac{3}{4}\cdot\pi/2\cdot\frac{8}{15}+\pi/10=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)\pi=\boxed{\frac{3}{10}\pi}$$

(après linéairisation: $\cos^4\varphi = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{\cos 4\theta}{8} + 4\frac{\cos 2\theta}{8} + \frac{6}{16}$

$\sin^4\varphi = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 = \frac{\cos 4\theta}{8} - 4\frac{\cos 2\theta}{8} + \frac{6}{16}$)

3b) Sur S_z, $z=0$ et alors

$U = (\overset{P}{x^3}, \overset{Q}{y^3}, \overset{R}{0})$ et la normale au plan (xy) est $(0,0,-1)$



Donc $\vec{U}\cdot\vec{n} = 0$

et $I_{S_z} = 0$

3c) De façon similaire $I_{S_y} = I_{S_x} = 0$

et alors $\boxed{I_S = \frac{3\pi}{10}}$

4) $\operatorname{div} U = 3(x^2+y^2+z^2)$

Le thm Ostrogradski-Gauss:

$$\iint_S \vec{U}\cdot\vec{ds} = \iiint_V 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$ dans les coord. sphériques:

ici $r\in[0,1]$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\varphi\in[0,\pi/2]$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 3r^2 r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= 3\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1\cdot\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{5}\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{3\pi}{10}}$$