Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2020

Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mécanique

UE-MAT3116L Maths Pour La Mécanique

CONTRÔLE CONTINU : ÉPREUVE FINALE

- MARDI 5 JANVIER 2021, DURÉE 1H30 -

Les appareils électroniques, les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Il est admis de consulter une feuille manuscrite A4.

PARTIE I

Question Partie I.

(1.5 pts) On considère une courbe donnée par

$$\begin{cases} y = & -3x \\ z = & 2x^2 \end{cases}$$

Trouver les équations de la tangente et du plan normal au point $(1, -3, 2)$.

—"—

Exercice Partie I.

Soit $\mathcal{P}$ le domaine dans $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes $x = y^2 + 2y + 1$ et $y = -x + 1$ et soit $\mathcal{C}$ le circuit donné par le bord de $\mathcal{P}$ parcouru dans le sens directe trigonométrique.
On note γ_1 la partie du circuit $\mathcal{C}$ qui suit la courbe $x = y^2 + 2y + 1$ et γ_2 la partie du circuit $\mathcal{C}$ qui suit la courbe $y = -x + 1$

1. (0.5 pt) Déterminer les points d'intersection de deux courbes.
2. (1 pt) Dessiner le domaine $\mathcal{P}$.
3. (2 pts) Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.
4. (1 pt) Écrire une paramétrisation $[0, 1] \to \gamma_2$ telle que pour $t \in [0, 1]$ on a

   $$\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x = f(t), \ y = g(t) \text{ où } t \in [0, 1]\},$$

   $f(t)$ et $g(t)$ - deux fonctions réelles.
   Indication. On remarque que $(f(0), g(0)) = (4, -3)$ et $(f(1), g(1)) = (1, 0)$.
5. Calculer l'integral curviligne $\oint_{\mathcal{C}} y^2 dx$ par deux méthodes :
   (a) (2 pts) Directement sur $\mathcal{C}$
   (b) (2 pts) En utilisant la formule de Green-Riemann

—"—

PARTIE II

Questions Partie II.

1. (1 pt) Calculer le champ de gradient de la fonction

$$F(x, y) = x^{\cos(y^2 x + 2x + 1)}$$

dans le domaine $x > 0,\ y \in \mathbb{R}$.
Montrer le calcul. Une reponse sans calcul vaut 0 points.

2. (1 pt) Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(2x)\, dx$$

Montrer le calcul. Une reponse sans calcul vaut 0 points.

Exercice Partie II.

On considère une partie de l'espace $\mathcal{V}$ délimité par la sphère unitaire de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ainsi que par les inégalités $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Soit $\mathcal{S}$ le bord de $\mathcal{V}$ oriente selon la normale exterieure. Cette surface $\mathcal{S}$ est une reunion de la partie sphérique notée $\mathcal{S}_s$, et des parties dans les plans d'équations $x = 0,\ y = 0$ et $z = 0$ noté $\mathcal{S}_x,\ \mathcal{S}_y$ et $\mathcal{S}_z$.

On note $\mathbf{U}$ le champ de vecteurs $(x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$.

1. (0.5 pt) Faire un dessin de $\mathcal{S}_z$ en notant les coordonnées du plan dans lequel se trouve $\mathcal{S}_z$.
2. (1 pt) Faire un dessin dans le plan d'équation $z = \frac{1}{4}$ de son intersection avec $\mathcal{V}$. Écrire les coordonnées du point avec x maximal.
3. Calculer le flux de $\mathbf{U}$ à travers $\mathcal{S}$. Pour cela :
   (a) (2 pts) Calculer le flux de $\mathbf{U}$ à travers $\mathcal{S}_s$.
   (b) (1 pt) En explicitant le champ de vecteurs $\mathbf{U}$ dans le plan $z = 0$ écrire la valeur du flux de $\mathbf{U}$ à travers $\mathcal{S}_z$.
   (c) (1 pt) Conclure.
4. (2.5 pts) Appliquer le théorème d'Ostrogradsky-Gauss pour le calcul d'une intégrale triple pour retrouver le même resultat.
   Vous pouvez utiliser les formules de passage en coordonnées sphèriques sans démonstration.

—″—