Examen Final Math 5 - 2020 Seconde chance

Questions

1. (1 pt) On considère une courbe donnée par
$$\begin{cases} x = & -2z \\ y = & 3z^3 \end{cases}$$
Trouver les équations de la tangente et du plan normal au point $(-2, 3, 1)$.
2. (1 pt) Calculer le champ de gradient de la fonction
$$F(x, y, z) = z^{\sin(zx^2 - 3z)} - 2$$
dans le domaine $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z > 0$.
Montrer le calcul. Une reponse sans calcul vaut 0 points.
3. (1 pt) Calculer l'intégrale suivante
$$\int_0^{\pi/2} \sin^3(3x)\, dx$$
Montrer le calcul. Une reponse sans calcul vaut 0 points.

Q1 $\begin{cases} x = -2t \\ y = 3t^3 \\ z = t \end{cases}$ au pt $t = 1$ $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 3, 1)$

Eqn du plan

$$\frac{x - x_0}{x'(1)} = \frac{y - y_0}{y'(1)} = \frac{z - z_0}{z'(1)}$$

$(x', y', z') = (-2, 9t^2, 1)$ pour $t = 1$ on a $(-2, 9, 1)$

donc $\boxed{\dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-3}{9} = \dfrac{z-1}{1}}$ et pour le plan:

$$x'(1)(x - x_0) + y'(1)(y - y_0) + z'(1)(z - z_0) = 0$$

ou bien $x'(1) \cdot x + y'(1) \cdot y + z'(1) \cdot z = x'(1) \cdot x_0 + y'(1) y_0 + z'(1) z_0$

donne $-2x + 9y + z = -2(2) + 9 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 32$

$$\boxed{-2x + 9y + z - 32 = 0}$$

Q2 $\overrightarrow{\text{grad}}\, F = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z} \right)$, $F(x,y,z) = z^{\sin(zx^2 - 3z)} - 2$
$= e^{\ln z \cdot \sin(zx^2 - 3z)} - 2$

Ici $\dfrac{\partial F}{\partial x} = z^{\sin(zx^2 - 3z)} \cdot \left(\ln z \cdot \cos(zx^2 - 3z) \cdot 2xz \right)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = z^{\sin(zx^2 - 3z)} \left(\frac{\sin(zx^2 - 3z)}{z} + \ln z \cdot \cos(zx^2 - 3z) \cdot (x^2 - 3) \right)$$

Q3 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(3x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\sin 9x}{4} + \frac{3}{4} \sin 3x \right) dx$

$$\sin^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}}{-8i}$$

$$= -\frac{1}{4} \sin 3t + \frac{3}{4} \sin t$$

$u = kx$
$du = k\,dx$
$dx = \dfrac{du}{k}$
$\displaystyle\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$

$$= \left[\frac{\cos 9x}{36} - \frac{\cos 3x}{4} \right]_0^{\pi/2} = -\left[\frac{1}{36} - \frac{1}{4} \right] = \boxed{\frac{2}{9}}$$

Exercice 1.

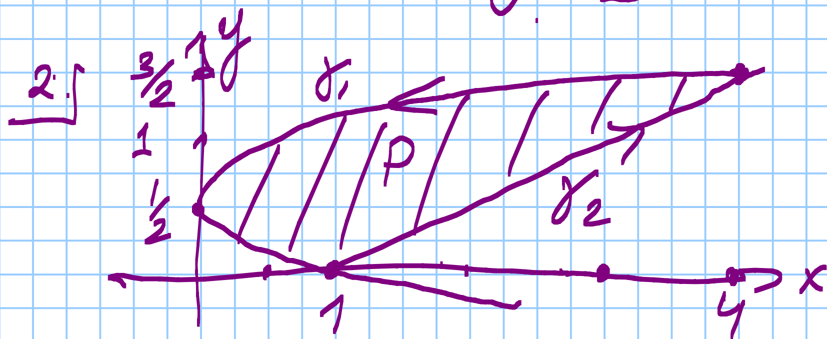
Soit $\mathcal{P}$ le domaine dans $\mathbb{R}^2$ limité par une parabôle d'équation $x = 4y^2 - 4y + 1$ et une droite passant par les points $(1, 0)$ et $(4, 1.5)$. Soit $\mathcal{C}$ le circuit donné par le bord de $\mathcal{P}$ parcouru dans le sens directe trigonométrique.
On note γ_1 la partie du circuit $\mathcal{C}$ qui suit la courbe $x = 4y^2 - 4y + 1$ et γ_2 la partie du circuit $\mathcal{C}$ qui suit la droite.

1. (0.5 pts) Déterminer le (ou les) point(s) d'intersection de la parabole γ_1 avec les axes Ox et Oy.
2. (1 pt) Dessiner le domaine $\mathcal{P}$.
3. (0.5 pts) Ecrire l'équation réduite de la droite dont γ_2 est une partie.
4. (1 pt) Écrire une paramétrisation $[0, 1] \to \gamma_2$ telle que pour $t \in [0, 1]$ on a
$$\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x = f(t), \ y = g(t),$$
où $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions réelles et $(f(0), g(0)) = (1, 0)$ et $(f(1), g(1)) = (4, 1.5)$.
5. (2 pts) Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.
6. Calculer l'integral curviligne $\oint_{\mathcal{C}} (y + 2)dx$ par deux méthodes :
   (a) (2 pts) Directement sur $\mathcal{C}$
   (b) (2 pts) En utilisant la formule de Green-Riemann

1) $y = 0$ donne $x = 1$ $(1, 0)$ - pt d'intersection avec l'axe oX

$x = 0$ donne $y = \frac{1}{2}$ $(0, 0.5)$ - pt d'intersection avec l'axe oY.

2)



3) La droite passant par deux pts (x_1, y_1) et (x_2, y_2) a pour éqn

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x-1}{4-1} = \frac{y-0}{1{,}5-0} \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}$$

4) $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = \frac{3}{2} t \end{cases}$

5) $\text{Aire } P = \iint_P dx\,dy$

$$= \int_0^{3/2} \int_{4y^2-4y+1}^{2y+1} dx\,dy = \int_0^{3/2} [2y + 1 - 4y^2 + 4y - 1]\,dy$$

$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2y + 1$

$$\text{aire } P = \int_0^{3/2} [-4y^2 + 6y]\,dy = \left[-\frac{4}{3} y^3 + \frac{6}{2} y^2 \right]_0^{3/2}$$

$$= -\frac{4}{3} \cdot \frac{3^3}{2^3} + 3 \cdot \frac{3^2}{2^2} = -\frac{9}{2} + \frac{27}{4} = \boxed{\frac{9}{4}} = 2{,}25$$

6a) paramétrisation :
γ_1 : $x = 4y^2 - 4y + 1$ $y \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ dans le sens opposé
$dx = (8y - 4)dy$

et γ_2 : $x = 2y+1$ $\quad y\in[0,\frac{3}{2}]$, $dx = 2dy$

(ou bien $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ avec $x\in[1,4]$)

$$\oint_C (y+2)\,dx = -\int_0^{3/2}(y+2)(8y-4)\,dy + \int_0^{3/2}(y+2)\cdot 2\,dy$$

$$= \int_0^{3/2}(y+2)(6-8y)\,dy = \int_0^{3/2}(-8y^2-10y+12)\,dy$$

$$= \left[-\frac{8y^3}{3} - 10\frac{y^2}{2} + 12y\right]_0^{3/2} = -\frac{8}{3}\cdot\frac{3^3}{8} - 5\frac{3^2}{2^2} + 12\cdot\frac{3}{2}$$

$$= 9 - \frac{45}{4} = \frac{36-45}{4} = \boxed{-\frac{9}{4}}$$

6b) Green-Riemann :

$$\oint_{C=\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx$$

par 5)

Ici $\oint_C (y+2)\,dx = \iint_D 0-1\,dx\,dy = -\int_0^{3/2}\int_{4y^2-4y+1}^{2y+1} dx\,dy \overset{\downarrow}{=} -\frac{9}{4}$

Exercice 2.

On considère une partie de l'espace $\mathcal{V}$ délimité par le cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

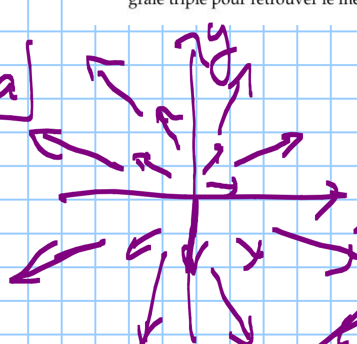
ainsi que par les inégalités $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 2$. Soit $\mathcal{S}$ la surface entourant $\mathcal{V}$ orientée selon la normale exterieure. Cette surface $\mathcal{S}$ est une reunion de la partie cylindrique notée $\mathcal{S}_c$, et des parties dans les plans d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, $z = 2$.

On note **U** le champ de vecteurs $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$.

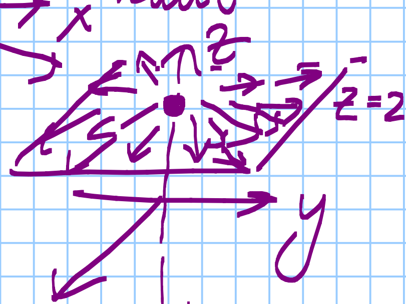
1. (1 pt) Faire un dessin de $\mathcal{S}$.
2. Dessiner le champ **U**
   (a) (1 pt) dans le plan $z = 2$.
   (b) (1 pt) dans le plan $x = 0$.
3. Calculer le flux de **U** à travers $\mathcal{C}$. Pour cela :
   (a) (2 pts) Calculer le flux de **U** à travers $\mathcal{S}_c$.
   (b) (1 pt) Montrer le flux à travers des quatre autres parties de la surface est 0.
4. (2 pts) Appliquer le théorème d'Ostrogradsky-Gauss pour le calcul d'une intégrale triple pour retrouver le même resultat.

1)

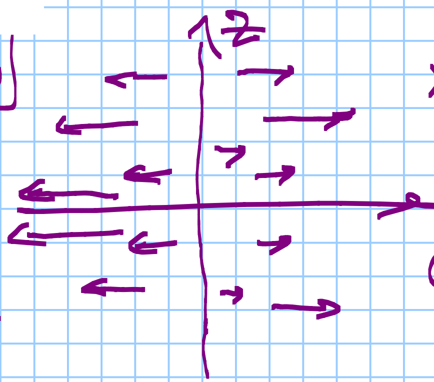
2a)



z=2
vu du
haut



2b)



x=0
champ
(0,y,0)

3) a) La normale à la surface S_c est $(x, y, 0)$. Elle est unitaire car $x^2+y^2=1$

Donc $\displaystyle\iint_{S_c} \vec{u} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_{S_c} (x^2+y^2)\, ds = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} 1 \, dt\, dz = \boxed{\pi}$

Rqs $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$ où $r=1$, $t \in [0, \pi/2]$, On paramétrise les pts de S_c par $(\cos t, \sin t, z)$ où $z \in [0, 2]$

On peut aussi utiliser la formule de la fiche 6 :

$$\iint_{S_c} \begin{vmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial t}, & \frac{\partial y}{\partial t}, & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} dt\,dz = \iint_{(t,z)} 1 \, dt\, dz$$

b) Le flux à travers d'autres surfaces entourant V est 0, car le champ restent dans les plans correspondants et ne les traverse pas. Donc le flux de $\vec{u}$ à travers de la surface du cylindre est $\boxed{\pi}$ (= 3a)

4. $\displaystyle\iint_S \vec{u} \cdot \vec{ds} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{u}\, dx\, dy\, dz$

$\operatorname{div} \vec{u} = 2$ et $\displaystyle\iiint_V dx\, dy\, dz = \frac{\pi \cdot 2}{4}$ car le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon de base R est $\pi R^2 \cdot h$. Ici on a un quart du cylindre.

Donc $\displaystyle\iiint_V 2 \cdot dx\, dy\, dz = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 2}{4} = \boxed{\pi}$